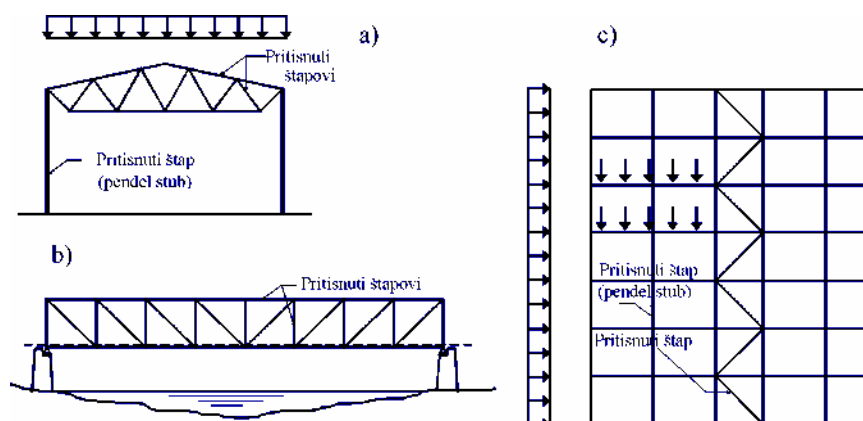


CENTRIČNO PRITISNUTI ELEMENTI

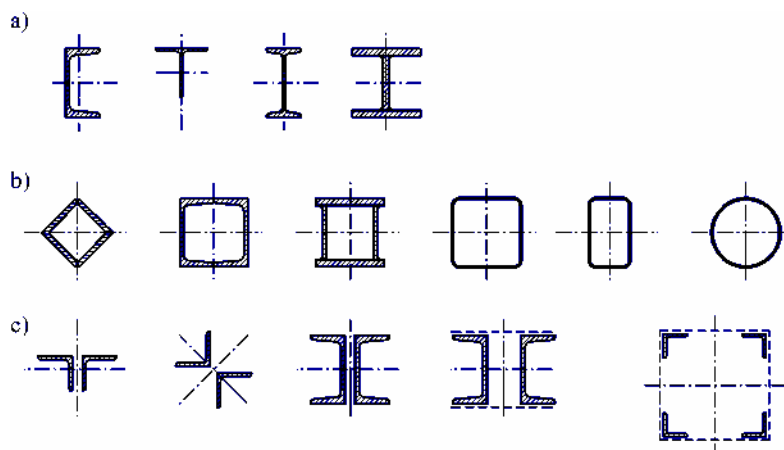
1

Primeri primene



2

Oblici poprečnih preseka



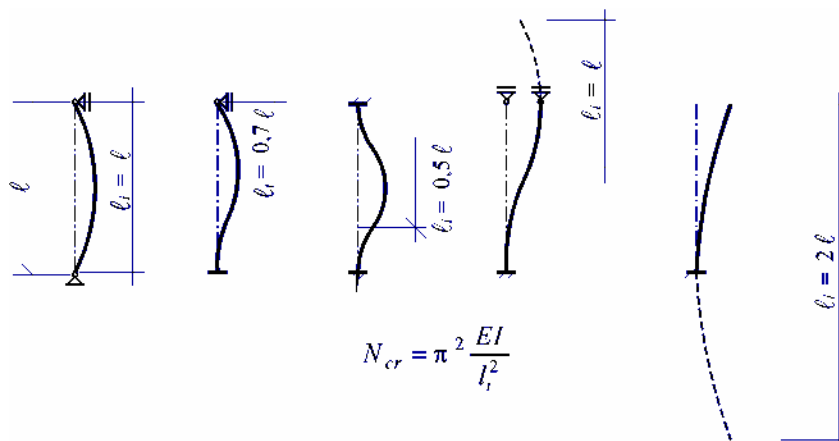
3

Specifičnosti pritisnutih elemenata –izvijanje

- Kontrola napona u poprečnom preseku nije dovoljan uslov za dimenzionisanje;
- Potrebno je proveriti i stabilnost pritisnutog elementa kao celine (uticaji teorije II reda);
- Do iscrpljenja nosivosti dolazi pre nego što nominalni naponi dostignu dopuštene vrednosti!
- Problem stabilnosti pritisnutih elemenata – izvijanje prvi je razmatrao Ojler (*Euler*) 1744. godine;

4

Dužina izvijanja



Pomoću dužine izvijanja uzimaju se u obzir načini oslanjanja

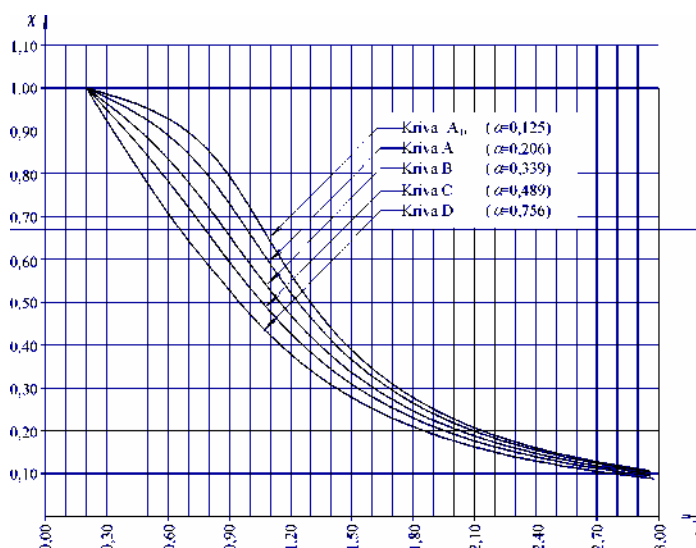
5

Krive izvijanja

- Krive izvijanja predstavljaju modifikaciju teorijskih krivih izvijanja (Ojler-Engeser);
- One definišu vezu između relativne vitkosti i koeficijenta izvijanja (bezdimenzionalne veličine);
- One treba da uvedu u proračun nesavršenosti realnih štapova kao što su: geometrijske imperfekcije, sopstveni naponi, varijacije modula elastičnosti i granice razvlačenja, ekscentricitet naprezanja...
- Zbog složenosti problema uvedena je familija evropskih krivih izvijanja (A_0 , A , B , C i D) koje su definisane teorijom sko-eksperimentalnim putem;
- Sve nesavršenosti se uvode u proračun preko ekvivalentne geometrijske imperfekcije - w_0

6

Evropske krive izvijanja



7

Relativna vitkost štapa $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{N_{pl}/N_{cr}} \quad \text{-relativna vitkost štapa}$$

$$N_{pl} = A \cdot f_y \quad \text{-plastična otpornost poprečnog preseka}$$

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_i^2} \quad \text{-Ojlerova kritična sila izvijanja}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{\pi^2 \cdot \frac{EI}{l_i^2}}} = \frac{l_i}{\sqrt{I/A}} \cdot \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}} = \frac{\lambda}{\lambda_v}$$

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{\min}} \quad \text{-vitkost štapa} \quad \lambda_v \quad \text{-vitkost na granici razvlačenja}$$

8

Vitkost na granici razvlačenja λ_v

- Vitkost štapa na granici razvlačenja je vitkost pri kojoj je Ojlerov kritičan napon jednak naponu na granici razvlačenja

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda_v^2} = f_y$$

$$\lambda_v = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

9

Vrednosti vitkosti λ_v za različite vrste čelika i debljine lima

Kvalitet čelika	t < 40 mm		t > 40mm	
	f_y [kN/cm ²]	λ_v	f_y [kN/cm ²]	λ_v
Č 0361	24	92,9	21,6	98,0
Č 0561	36	75,9	32,4	80,0

Vrednosti koeficijenta geometrijske nesavršenosti za različite krive izvijanja

Kriva izvijanja	Ao	A	B	C	D
α	0,125	0,206	0,339	0,489	0,756

**Proračun stabilnosti pritisnutih štapova
jednodelnog poprečnog preseka prema
JUS U.E7.081-1986**

$$\sigma = \frac{N_c}{A} \leq \sigma_{i,dop} \quad \sigma_{i,dop} = \chi \cdot \sigma_{dop} = \chi \cdot \frac{f_y}{\gamma}$$

Gde su:

N_c - aksijalna sila u preseku

A - površina poprečnog preseka

$\sigma_{i,dop}$ - dopušteni napon izvijanja

χ (hi) – bezdimenzionalni koeficijent izvijanja

σ_{dop} - dopušteni normalni napon

f_y - napon na granici razvlačenja

γ (ni) – koeficijent sigurnosti

11

Bezdimenzionalni koeficijent izvijanja χ

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{Za } \bar{\lambda} \leq 0,2 \\ \frac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4 \cdot \bar{\lambda}^2}} & \text{Za } \bar{\lambda} > 0,2 \end{cases} \quad \beta = 1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2$$

12

Maksimalne vitkosti pritisnutih štapova

- $\lambda_{\max} = 250$ za spregove i sekundarne elemente
- $\lambda_{\max} = 200$ za glavne noseće elemente
- $\lambda_{\max} = 150$ za oslonačke štapove (stubove) i glavne noseće elemente kod konstrukcija opterećenih na zamor materijala

13

Merodavna vrednost bezdimenzionalnog koeficijenta izvijanja

Potrebno je proveriti izvijanje oko obe glavne ose inercije!

U opštem slučaju mogu da se razlikuju sledeći parametri:

- poluprečnik inercije (i_y, i_z),
- dužine izvijanja (l_{iy}, l_{iz}) i
- relevantna kriva izvijanja (A_0, A, B, C i D).

14

Tabela 4.4 - Vrednosti bezdimenzionalnog koeficijenta X

λ	Kriva				
	A ₀	A	B	C	D
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,9859	0,9775	0,9641	0,9491	0,9235
0,4	0,9701	0,9528	0,9261	0,8973	0,8504
0,5	0,9513	0,9243	0,8842	0,8430	0,7793
0,6	0,9276	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0,7	0,8961	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0,8	0,8539	0,7957	0,7245	0,662	0,5797
0,9	0,7961	0,7339	0,6612	0,5998	0,5288
1,0	0,7253	0,6656	0,5978	0,5399	0,4671
1,1	0,6482	0,5960	0,5352	0,4842	0,4189
1,2	0,7732	0,5300	0,4781	0,4338	0,3762
1,3	0,5053	0,5703	0,4269	0,3808	0,3385
1,4	0,4461	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1,5	0,3953	0,3724	0,3422	0,3145	0,2766
1,6	0,3520	0,3332	0,3079	0,2842	0,2512
1,7	0,3150	0,3994	0,2781	0,2577	0,2289
1,8	0,2853	0,2702	0,2521	0,2345	0,2093
1,9	0,2559	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2,0	0,2323	0,2229	0,2095	0,1962	0,1766
2,1	0,2117	0,2039	0,1920	0,1803	0,1630
2,2	0,1937	0,1867	0,1765	0,1662	0,1488
2,3	0,1779	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2,4	0,1639	0,1585	0,1506	0,1425	0,1302

Određivanje krive izvijanja
za pojedine poprečne preseke
profila

Tip poprečnog preseka ¹⁾		Izvijanje upravno na osu	Kriva ²⁾³⁾ izvijanja
Šupli profili 		y-y z-z	A
Zavareni sudskaosi preseci 	Konstrukcioni šavovi	y-y z-z	B
	Debeli šavovi (puni provar)	y-y z-z	C
Valjani I - preseci 	$h/b > 1,2$ $t \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	A(A ₀) B(A)
	$h/b \leq 1,2$ $t \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	B(A) C(B)
	$t > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	D
Zavareni I - preseci 	$t \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	B C
	$t > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	C D
U - L - T - HOP - I puni preseci 		y-y z-z	C

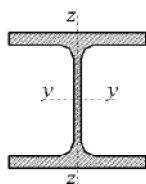
¹⁾ Preseci koji nisu zastupljeni u ovoj tabeli klasifikuju se prema t.2.4 i 2.5. U slučaju nedoumice za preseke sa $t \leq 40 \text{ mm}$ primeniti krivu izvijanja C.

²⁾ Krive izvijanja date u zagradama primenjuju se za čelike sa $f_y > 430 \text{ MPa}$ i $t < 40 \text{ mm}$.

³⁾ Na bazi eksperimentalno i numerički verifikovanih podataka za pojedine tipove poprečnih preseka mogu se alternativno primeniti za druge krive izvijanja.

1. Dimenzionisati centrično pritisnuti štap konstantnog jednodelnog poprečnog preseka.

U poprečnom pravcu štap je bočno pridržen na krajevima i u sredini



Osnovni materijal: Č0361

Slučaj opterećenja: II

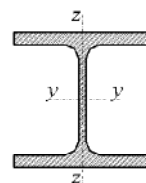
Sila pritiska: $N_c = 1200 \text{ kN}$

Dužina štapa: $L = 5.0 \text{ m}$

Tip profila: HEA

Osnovni materijal Č0361 (II sl.o.)
dopušten normalni napon $\sigma_{\text{dop}} = 18 \text{ kN/cm}^2$

$$A_{\text{pot}} \approx \frac{N_c}{\sigma_{\text{dop}}} = \frac{1200}{18} = 66.67 \text{ cm}^2$$



Usvojen profil HEA 240

	G kg/m	h mm	b mm	t _w mm	t _f mm	r mm	A cm ²	h _i mm	d mm	Ø	p _{min} mm	p _{max} mm	AL m ² /m	AG m ² /t
HEA 240	60.3	230	240	7.5	12	21	76.8	206	164	M 27	104	138	1.369	22.7
	G kg/m	I _y cm ⁴	W _{el.y} cm ³	W _{pl.y} cm ³	i _y cm	Av _z cm ²	I _z cm ⁴	W _{el.z} cm ³	W _{pl.z} cm ³	i _z cm	s s cm	I _t cm ⁴	I _w cm ⁶	
HEA 240	60.3	7763	675.1	744.6	10.05	25.18	2769	230.7	351.7	6	56.1	41.55	328.5	

Izvijanje u ravni štapa (oko y-y ose)

$$I_{iy} = \beta \cdot I = 0.7 \cdot 500 = 350 \text{ cm}$$

Izvijanje van ravni štapa (oko z-z ose)

$$I_i = 0.5 \cdot I = 0.5 \cdot 500 = 250 \text{ cm}$$

$$I_{iz} = 1.0 \cdot I_i = 1.0 \cdot 250 = 250 \text{ cm}$$

Određivanje vitkosti štapa

$$\lambda_y = \frac{l_y}{i_y} = \frac{350}{10.1} = 34.65$$

Određivanje relativne vitkosti štapa ($\lambda_v = 92.9$)

$$\overline{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_v} = \frac{34.65}{92.9} = 0.372$$

 $\alpha = 0.339$ (kriva izvijanja B)

$$\beta_y = 1 + \alpha \cdot (\overline{\lambda}_y - 0.2) + \overline{\lambda}_y = 1 + 0.339(0.372 - 0.2) + 0.372^2 = 1.196$$

$$\chi_y = \frac{2}{\left(\beta_y + \sqrt{\beta_y^2 - 4\overline{\lambda}_y^2} \right)} = \frac{2}{\left(1.196 + \sqrt{1.196^2 - 4 \cdot 0.372^2} \right)} = 0.937$$

Za izvijanje oko z-z ose štapa

Određivanje vitkosti štapa

$$\lambda_z = \frac{l_z}{i_z} = \frac{250}{6} = 41.67$$

Određivanje relativne vitkosti štapa ($\lambda_v = 92.9$)

$$\overline{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_v} = \frac{41.67}{92.9} = 0.44$$

 $\alpha = 0.489$ (kriva izvijanja C)

$$\beta_z = 1 + \alpha \cdot (\overline{\lambda}_z - 0.2) + \overline{\lambda}_z = 1 + 0.489(0.44 - 0.2) + 0.44^2 = 1.31$$

$$\chi_z = \frac{2}{\left(\beta_z + \sqrt{\beta_z^2 - 4\overline{\lambda}_z^2} \right)} = \frac{2}{\left(1.31 + \sqrt{1.31^2 - 4 \cdot 0.44^2} \right)} = 0.877$$

Kontrola napona: $\chi_{\min} = \min(0.937, 0.877) = 0.877$

$$\sigma = \frac{N_c}{A} = \frac{1200}{76.8} = 15.62 \text{ kN/cm}^2 < \sigma_{\text{idop}} = \chi_{\min} \cdot \sigma_{\text{dop}} = 0.877 \cdot 18 = 15.78 \text{ kN/cm}^2$$

Usvojen profil HEA 240 – Č0361

Prema tabeli za koeficijent χ :

Izvijanje u ravni štapa (oko y-y ose)

$$\bar{\lambda}_y = 0,372$$

kriva izvijanja B

$$\chi_y = 0,9641 \quad \text{za} \quad \bar{\lambda}_y = 0,3$$

$$\chi_y = 0,9261 \quad \bar{\lambda}_y = 0,4$$

za $\bar{\lambda}_y = 0,37$ interpolacijom

$$\chi_y = 0,9375$$

Izvijanje van ravni štapa (oko z-z ose)

$$\bar{\lambda}_z = 0,44$$

kriva izvijanja C

$$\chi_z = 0,8973 \quad \text{za} \quad \bar{\lambda}_z = 0,4$$

$$\chi_z = 0,8430 \quad \bar{\lambda}_z = 0,5$$

za $\bar{\lambda}_z = 0,44$ interpolacijom

$$\chi_z = 0,876$$

Rezultati se poklapaju

21

ŠTAPOVI IZLOŽENI PRITISKU I SAVIJANJU (SRPS U.E7.096/1986)

Kontrola se vrši prema sledećim uslovima

$$k_n \cdot \sigma_N + k_{my} \cdot \vartheta \cdot \sigma_{My} + k_{mz} \cdot \sigma_{Mz} \leq \sigma_{dop}$$

gde su

$$1 \leq k_{ny} = 1 + \frac{\alpha_y (\bar{\lambda}_y - 0.2)}{1 - \bar{\lambda}_y^2 \cdot \bar{\sigma}_N} \leq \frac{1}{\chi_y}$$

$$1 \leq k_{nz} = 1 + \frac{\alpha_z (\bar{\lambda}_z - 0.2)}{1 - \bar{\lambda}_z^2 \cdot \bar{\sigma}_N} \leq \frac{1}{\chi_z}$$

$$k_n = \max\{k_{ny}; k_{nz}\}$$

22

$$k_{my} = \frac{\beta_y}{1 - \lambda_y^2 \cdot \bar{\sigma}_N}$$

β_y i β_z zavise od oblika dijagrama momenata

$$k_{mz} = \frac{\beta_z}{1 - \lambda_z^2 \cdot \bar{\sigma}_N}$$

$$\bar{\sigma}_N = \frac{\gamma \cdot N}{A \cdot \sigma_V}$$

θ -Koeficijent za bočno torziono izvijanje

U slučaju sprečenog bočnog torzionog izvijanja $\theta=1$

Za savijanje oko jače ose (što je uglavnom slučaj) i sprečeno bočno torziono izvijanje imamo da je

$$k_n \cdot \sigma_N + k_{my} \cdot \sigma_{My} \leq \sigma_{dop} = \frac{f_y}{\gamma}$$

23

Određivanje koeficijenata k_{my} i k_{mz}

$$k_{my} = \frac{\beta_y}{1 - \lambda_y^2 \cdot \bar{\sigma}_N}$$

$$k_{mz} = \frac{\beta_z}{1 - \lambda_z^2 \cdot \bar{\sigma}_N}$$

Oblik momentnog dijagrama	β
M 	1,1
M 	1,0
M 	1,0
M 	0,66
M  M	0,44
M  $\psi \cdot M$ $-1 < \psi < 1$	$0,66 + 0,44 \cdot \psi \geq 0,44$

24

2. Dimenzionisati stub opterećen kao na slici

Stub je kontinuirano bočno pridrжан pa nema opasnosti od bočnog torzionog izvijanja

Osnovni materijal: Č0361

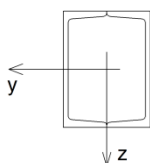
Slučaj opterećenja: I

Sila pritiska: $N=500 \text{ kN}$

Kont. opterećenje $q=5 \text{ kN/m}$

Dužina štapa: $L=2.30 \text{ m}$

Tip profila: 2 U 200



Utjecaji u nosaču

Moment u uklještenju $M=ql^2/2=5 \cdot 2.3^2/2=13.22 \text{ kNm}$

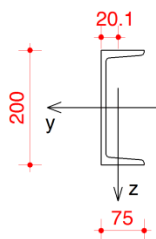
Normalna sila u uklještenju je $N=300 \text{ kN}$

Osnovni materijal Č0361 (I sl.o.)

dopušten normalni napon $\sigma_{\text{dop}} = 16 \text{ kN/cm}^2$

U slučaju sprečenog bočnog torzionog izvijanja $\theta=1$

$$k_n \cdot \sigma_N + k_{my} \cdot \sigma_{My} \leq \sigma_{\text{dop}}$$



Za U 200 iz tablica imamo

$$A = 32.2 \text{ cm}^2$$

$$W_y = 191 \text{ cm}^3$$

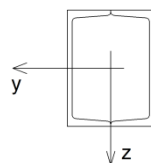
$$W_z = 27 \text{ cm}^3$$

$$I_y = 1910 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 148 \text{ cm}^4$$

$$i_y = 7.70 \text{ cm}$$

$$i_z = 2.14 \text{ cm}$$



Za 2 U 200 iz tablica imamo

$$A = 32.2 \cdot 2 = 64.40 \text{ cm}^2$$

$$W_y = 191 \cdot 2 = 382 \text{ cm}^3$$

$$W_z = 299 \text{ cm}^3$$

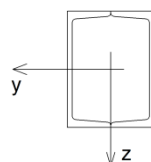
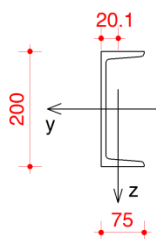
$$I_y = 1910 \cdot 2 = 3820 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 2240 \text{ cm}^4$$

$$i_y = 7.70 \text{ cm}$$

$$i_z = 5.89 \text{ cm}$$

27



Kako dobijamo vrednosti za 2U200

1. Računamo momenat inercije za osu z za ukupno težište koje je sada na polovini profila

$$I_z = 2I_z^s + 2 \cdot A_1 (7.5 - 2.01)^2 = 2 \cdot 148 + 2 \cdot 32.2 \cdot 5.49^2 = 2237 \text{ cm}^4$$

Otporni momenat je

$$W_z = I_z / b = 2237 / 7.5 = 298 \text{ cm}^3$$

Poluprečnik inercije je

$$i_z = \sqrt{I_z / A} = \sqrt{2237 / 64.4} = 5.89 \text{ cm}$$

28

$$k_n \cdot \sigma_N + k_{my} \cdot \sigma_{My} \leq \sigma_{dop}$$

$$k_{ny} = 1 + \frac{\alpha_y (\bar{\lambda}_y - 0.2)}{1 - \bar{\lambda}_y^2 \cdot \bar{\sigma}_N} \quad k_{my} = \frac{\beta_y}{1 - \bar{\lambda}_y^2 \cdot \bar{\sigma}_N}$$

$$\bar{\sigma}_N = \frac{\gamma \cdot N}{A \cdot \sigma_V} = \frac{1.5 \cdot 300}{64.4 \cdot 24} = 0.291$$

$\alpha = 0.489$ (kriva izvijanja B)

Određivanje dužine izvijanja: $l_i = 2 \cdot 230 = 460 \text{ cm}$

$$\lambda_y = \frac{l_i}{i_y} = \frac{460}{7.70} = 59.74 \quad \lambda_V = 92.9$$

29

$$\bar{\lambda}_y = \frac{59.74}{92.9} = 0.64$$

$$k_{ny} = 1 + \frac{\alpha_y (\bar{\lambda}_y - 0.2)}{1 - \bar{\lambda}_y^2 \cdot \bar{\sigma}_N} = 1 + \frac{0.489(0.64 - 0.2)}{1 - 0.64^2 \cdot 0.291} = 1.24$$

$$k_{my} = \frac{\beta_y}{1 - \bar{\lambda}_y^2 \cdot \bar{\sigma}_N} = \frac{0.66}{1 - 0.64^2 \cdot 0.291} = 0.75$$

$$k_n \cdot \sigma_N + k_{my} \cdot \sigma_{My} \leq \sigma_{dop}$$

$$1.24 \cdot \frac{300}{64.4} + 1.0 \cdot \frac{13.22 \cdot 10^2}{382} = 5.78 + 3.46 = 9.24 \leq \sigma_{dop}$$

30