

Osnovne vrste naprezanja:

Aksijalno naprezanje

Smicanje

Uvijanje

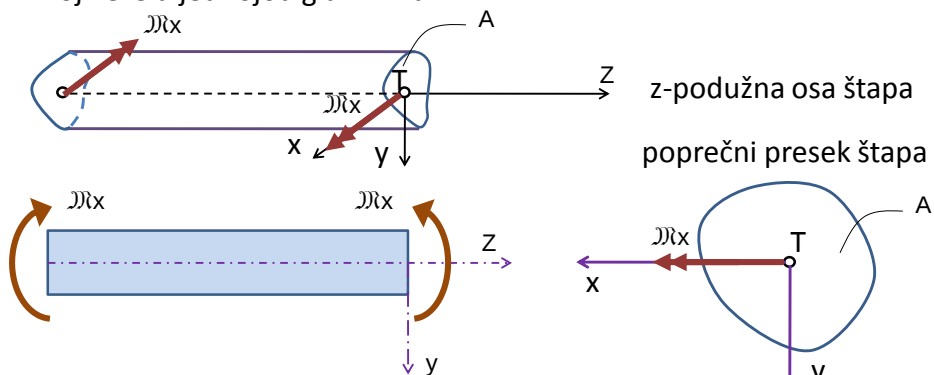
Savijanje

Izvijanje

1

ČISTO PRAVO SAVIJANJE

Štap je opterećen na bazisima sa dva jednaka a suprotna sprega M_x koji leže u jednoj od glavnih ravni



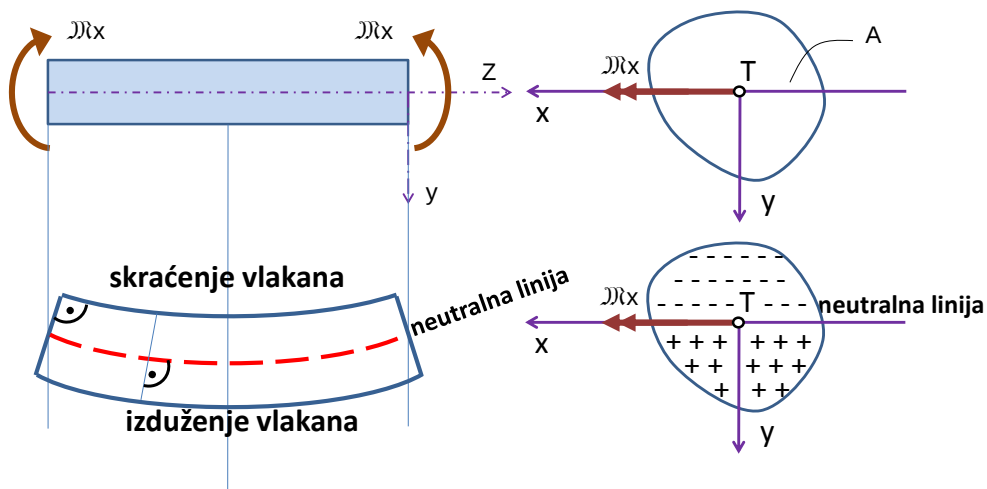
M_x -momenat u ravni yOz (jedna od glavnih ravni)

x i y -glavne centralne ose inercije

Ovako opterećena greda je u stanju **čistog pravog savijanja**

2

Napon kod čistog pravog savijanja



3

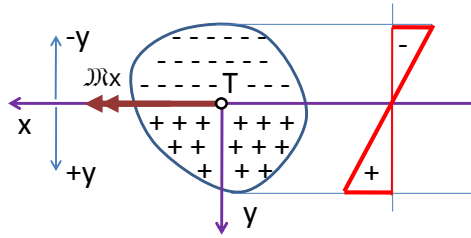
U analizi deformacija i naprezanja pri čistom savijanju pretpostavlja se sledeće:

- Ravni poprečni preseki ostaju pri deformaciji štapa ravni i upravni na savijenu osu štapa (Bernoullieva hipoteza).
- Materijal štapa smatramo homogenim i izotropnim.
- Između uzdužnih vlakana nema nikakvog uzajamnog delovanja sila.
- Normalni naponi proporcionalni su deformacijama (Hookeov zakon).

4

Napon u nekoj tački preseka kod čistog pravog savijanja je jednak

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$



gde su

M_x –momenat savijanja u posmatranom preseku

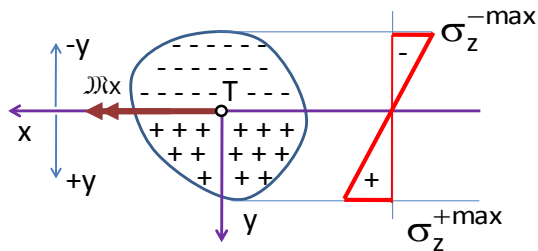
I_x –momenat inercije za glavnu x osu

y –rastojanje posmatrane tačke preseka od x ose

5

Naponi su najveći u tački gde je najveće udaljenje od x ose

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max}$$



Najveći napon zatezanja je u tački gde je y maksimalno na zategnutoj strani preseka

$$\sigma_z^{+\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max}^+ = \frac{M_x}{\frac{I_x}{y_{\max}^+}} = \frac{M_x}{W_x^+}$$

W_x^+ – Otporni momenat preseka na zategnutoj strani

6

Najveći napon pritiska je u tački gde je y maksimalno na pritisnutoj strani preseka

$$\sigma_z^{-\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max}^- = \frac{M_x}{\frac{I_x}{y_{\max}^-}} = \frac{M_x}{W_x^-}$$

W_x^- — Otporni momenat preseka na pritisnutoj strani

Rezime

Normalni napon kod čistog pravog savijanja u opštem obliku je jednak

$$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x}$$

napon=Momenat kroz Otporni momenat

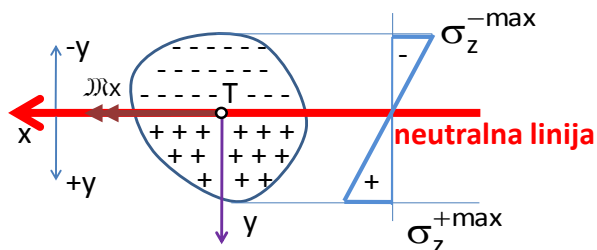
7

Neutralna linija kod čistog pravog savijanja

Neutralna linija je mesto tačaka preseka gde je napon jednak nuli

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = 0$$

kako je $\frac{M_x}{I_x} \neq 0$

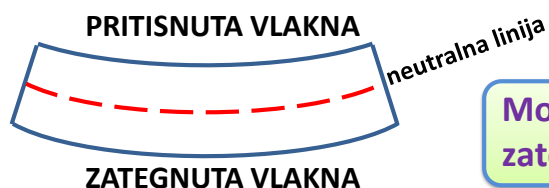
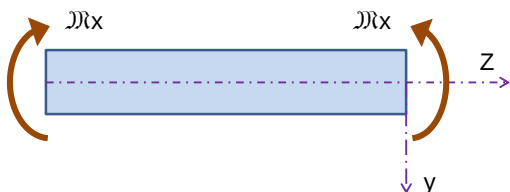


sledi da je jednačina neutralne linije kod čistog pravog savijanja data jednačinom **$y=0$** a to je jednačina **x ose**

Neutralna linija se poklapa sa glavnom X osom

8

ZNAK MOMENTA



Momenat je pozitivan kada zateže donju stranu

9

Primer 5.1

Greda poprečnih preseka kao na slici opterećena je pozitivnim momentom savijanja $M_x = 54 \text{ kNm}$. Odrediti napone u naznačenim tačkama A, B i C.

a)

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = 0 \quad I_x = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 6667 \text{ cm}^4$$

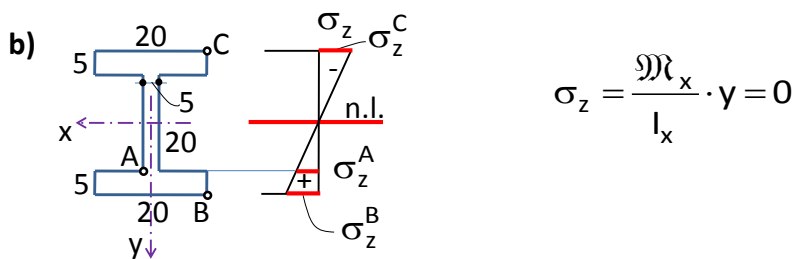
$$\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{6667} \cdot y$$

tačka A: $y=0$ $\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{6667} \cdot 0 = 0$

tačka B: $y=-10$ $\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{6667} \cdot (-10) = -8,10 \text{ kN/cm}^2$

tačka C: $y=10$ $\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{6667} \cdot 10 = 8,10 \text{ kN/cm}^2$

10



$$I_x = \frac{20 \cdot 5^3}{12} \cdot 2 + \frac{5 \cdot 20^3}{12} + 2 \cdot 12,5^2 \cdot 20 \cdot 5 = 35000 \text{ cm}^4$$

tačka A: $y=10$ $\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{35000} \cdot 10 = 1,54 \text{ kN/cm}^2$

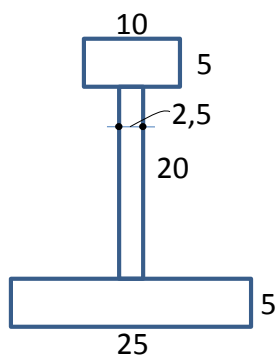
tačka B: $y=15$ $\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{35000} \cdot 15 = 2,31 \text{ kN/cm}^2$

tačka C: $y=-15$ $\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{35000} \cdot (-15) = -2,31 \text{ kN/cm}^2$

11

Primer 5.2

Poprečni presek grede od livenog gvožđa raspona $l=4$ m dat je na slici. Odrediti intenzitet sile P koja može da deluje na sredini raspona grede ako je dozvoljeni napon zatezanja $\sigma_{\text{doz}}=16 \text{ kN/cm}^2$. Koliki će pri tom biti napon pritiska.



12

Potrebno je prvo odrediti položaj težišta poprečnog preseka

Podelili smo složenu površinu na tri proste površine

Površina je simetrična oko y ose pa je težište po x pravcu određeno

Odredićemo položaj pojedinačnih težišta po y pravcu

$$y_{T1} = 5 + 20 + 2,5 = 27,5 \text{ cm}$$

$$y_{T2} = 5 + 10 = 15 \text{ cm}$$

$$y_{T3} = 2,5 \text{ cm}$$

Pojedinačne površine su

$$A_1 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$$

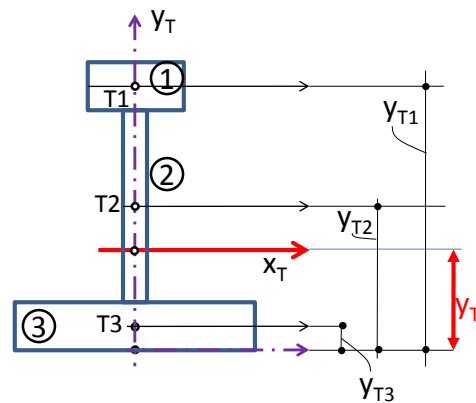
$$A_2 = 20 \cdot 2,5 = 50 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 25 \cdot 5 = 125 \text{ cm}^2$$

Položaj težišta je

$$y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_{Ti}}{\sum A_i} = \frac{50 \cdot 27,5 + 50 \cdot 15 + 125 \cdot 2,5}{50 + 50 + 125}$$

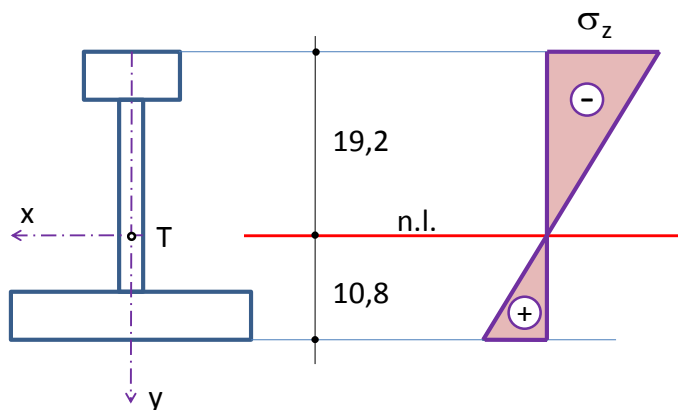
$$y_T = 10,8 \text{ cm}$$



13

Određujemo sada aksijalni moment inercije oko ose x

$$I_x = I_x^S + I_x^P = \frac{10 \cdot 5^3}{12} + 50 \cdot (27,5 - 10,8)^2 + \frac{2,5 \cdot 20^3}{12} + 50 \cdot (15 - 10,8)^2 + \frac{25 \cdot 5^3}{12} + 125 \cdot (10,8 - 2,5)^2 = 25470 \text{ cm}^2$$



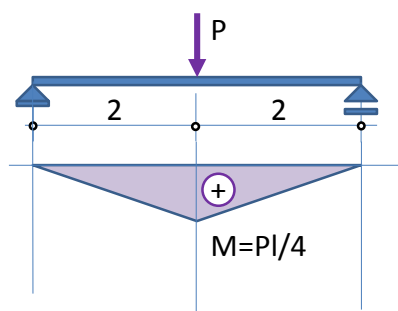
14

Otporni momenti na zategnutoj i pritisnutoj ivici su

$$W_x^+ = \frac{I_x}{y_{\max}^+} = \frac{25470}{10,8} = 2358,33 \text{ cm}^3$$

$$W_x^- = \frac{I_x}{y_{\max}^-} = \frac{25470}{19,2} = 1326,56 \text{ cm}^3$$

Određivanje statičkih uticaja za nosač



$$M = Pl/4$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x} = \sigma_{\text{dop}}$$

$$M_x = W_x^+ \cdot \sigma_{\text{dop}}$$

15

$$W_x^+ = 2358,33 \text{ cm}^3$$

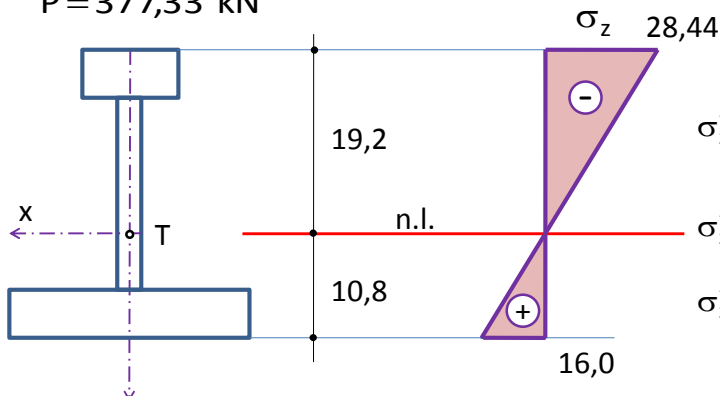
$$M_x = 2358,33 \cdot 16 = 37733,28 \text{ kNcm} = 377,33 \text{ kNm}$$

$$M_x = \frac{P \cdot l}{4} \rightarrow P = \frac{4M_x}{l} = \frac{4 \cdot 377,33}{4}$$

jedinice

$$P = \frac{\text{kNm}}{\text{m}} = \text{kN}$$

$$P = 377,33 \text{ kN}$$



napon pritiska

$$\sigma_z^- = \frac{M_x}{W_x^-}$$

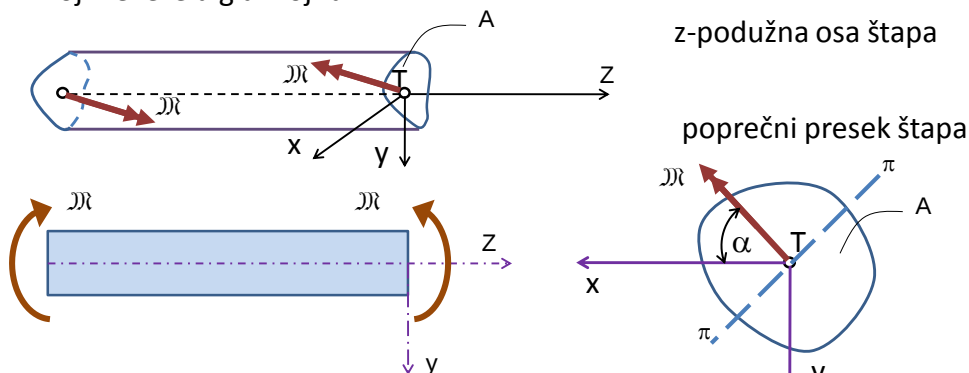
$$\sigma_z^- = \frac{377,33 \cdot 10^2}{1326,56} =$$

$$\sigma_z^- = 28,44 \text{ kN/cm}^2$$

16

ČISTO KOSO SAVIJANJE

Štap je opterećen na bazisima sa dva jednaka a suprotna sprega M_x koji ne leže u glavnoj ravni

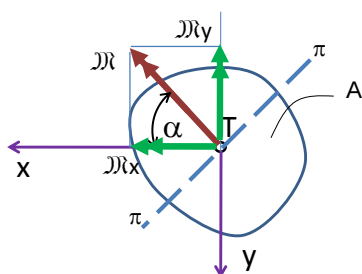


M_x -momenat u ravni π - π čija normala zaklapa ugao α sa x osom
x i y-glavne centralne ose inercije

Ovako opterećena greda je u stanju **čistog kosog savijanja**

17

Napon kod čistog pravog savijanja



$$M_x = M \cdot \cos \alpha$$

$$M_y = M \cdot \sin \alpha$$

zamenimo u izraz za napon

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot \cos \alpha}{I_x} \cdot y + \frac{M_y \cdot \sin \alpha}{I_y} \cdot x = M \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{I_y} \cdot x \right)$$

18

Spreg razlažemo na dva upravna sprega M_x i M_y koji prave dva čista prava savijanja

Napon je tada jednak

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

odnosno

$$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

Položaj neutralne linije

U tačkama neutralne linije napon je jednak nuli, pa zato izjednačimo izraz za napon sa nulom

$$\mathfrak{M} \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{I_y} \cdot x \right) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{moment savijanja je različit od nule} \\ \text{pa ostaje} \end{array}$$

$$\frac{\cos \alpha}{I_x} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{I_y} \cdot x = 0$$

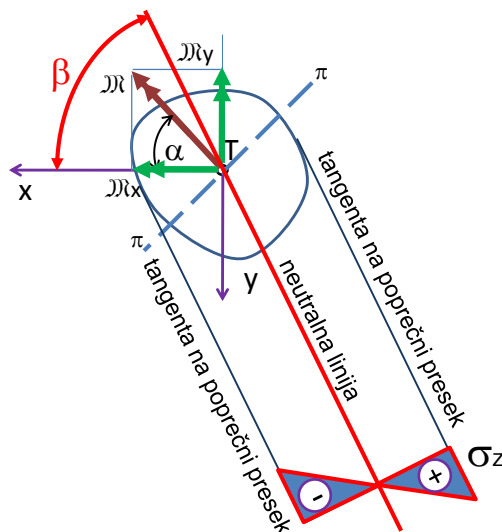
$$y = - \left(\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \right) \cdot x \quad \text{jednačina neutralne linije}$$

To je prava koja prolazi kroz koordinatni početak odnosno težište poprečnog preseka i zaklapa ugao β sa pozitivnim delom x ose

$$y = \operatorname{tg} \beta \cdot x$$

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha$$

19



20