

ELASTIČNA LINIJA GREDE



Deformisani oblik osovine grede naziva se elastična linija grede.

Ordinate el. linije su ugibi grede v

Promena ugla između tangente na el.liniju i ose štapa je nagib grede φ

Krivina je proporcionalna momentu

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right| = -\frac{M_x(z)}{EI_x}$$

1

ODREĐIVANJE DEFORMACIJA GREDE

Maksvel-Morova metoda fiktivnog nosača

Koristimo za određivanje ugiba i nagiba elastične linije.

Bazira se na matematičkoj analogiji između diferencijalne jednačine elastične linije

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right| = -\frac{M_x(z)}{EI_x} \quad \text{.....1}$$

i diferencijalne zavisnosti između napadnog momenta i spoljašnjeg opterećenja

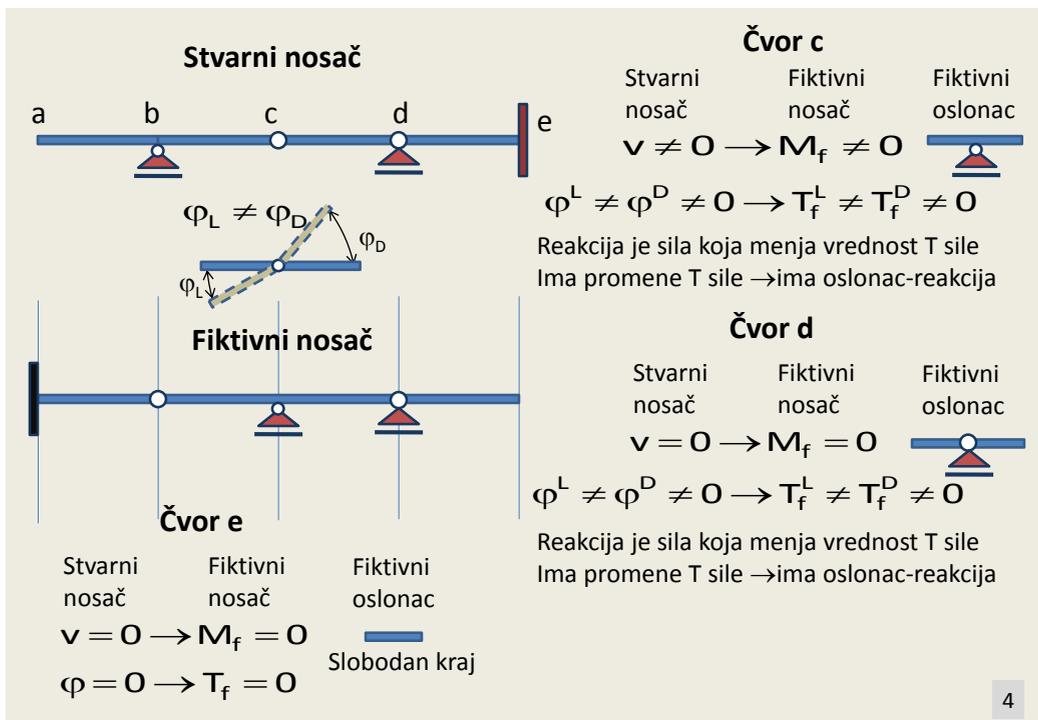
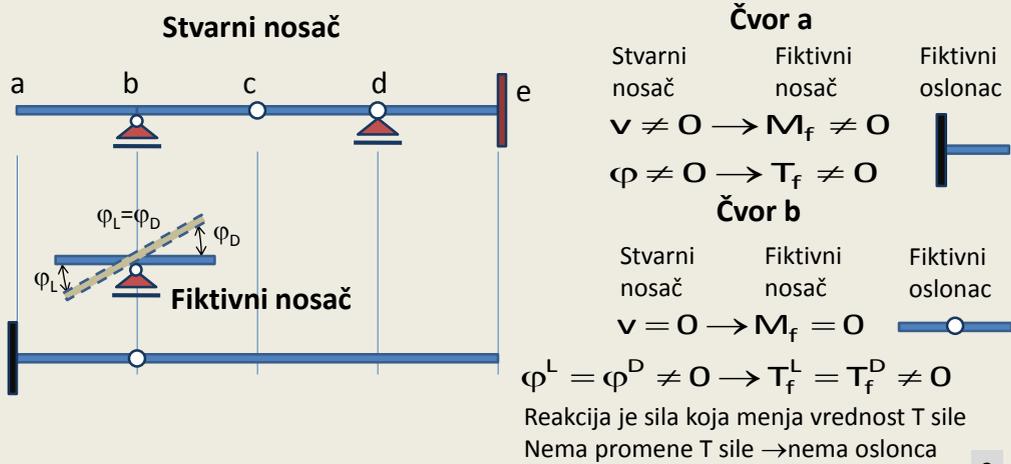
$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = -q(z) \quad \text{.....2}$$

Znači ugib možemo odrediti tretirajući desnu stranu jednačine 1 kao opterećenje fiktivnog grednog nosača, pa za njega nacrtati dijagram momenata. Tako dobijene vrednosti momenata su ugibi elastične linije.

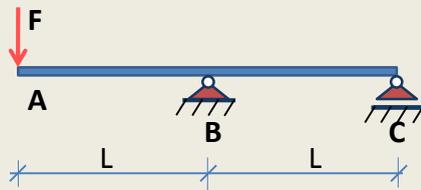
2

$$\frac{\partial M}{\partial z} = T_y(z) \quad \text{Nagibi su jednaki transverzalnoj sili na fiktivnom nosaču}$$

Fiktivni nosač mora da ispuni analogiju graničnih uslova
Ugibu odgovara moment a nagibu transverzalna sila



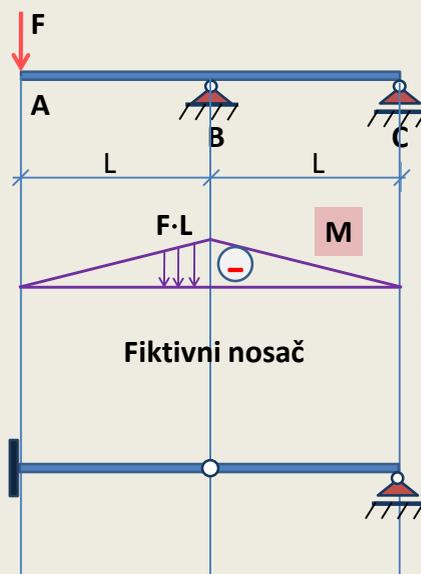
7.1 Za zadati nosač odrediti ugib čvora A i nagibe tangente u tačkama A i C



Postupak:

1. Na stvarnom nosaču nacrtamo dijagram momenata usled spoljašnjeg opterećenja
2. Usvajimo i nacrtamo fiktivni nosač
3. Opteretimo fiktivni nosač sa fiktivnim opterećenjem odnosno dijagramom momenata iz tačke 1 sa predznakom minus.
4. Vrednost fiktivnog momenta u čvoru A je vrednost ugiba u čvoru A
5. Vrednost fiktivnih transverzalnih sila u čvorovima A i C je vrednost nagiba u tim čvorovima

5



1. Crtanje dijagrama momenata

$$M_B = -F \cdot L$$

Momentat je negativan sa leve strane
U čvorovima A i C $\rightarrow M=0$

2. Usvajanje fiktivnog nosača

$$v \neq 0 \rightarrow M_f \neq 0$$

$$\varphi \neq 0 \rightarrow T_f \neq 0$$

čvor A

$$v = 0 \rightarrow M_f = 0$$

čvor B

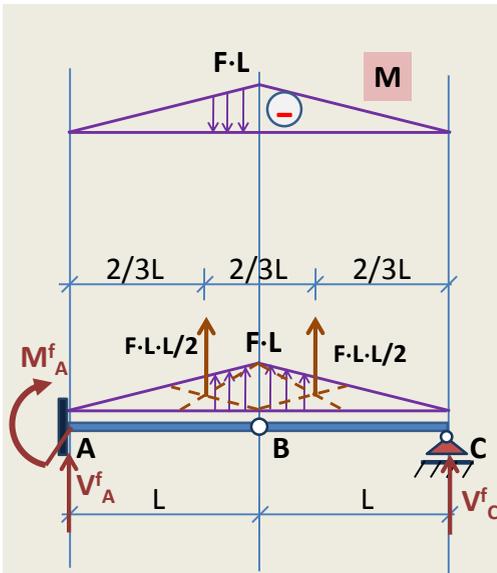
$$\varphi^L = \varphi^D \neq 0 \rightarrow T_f^L = T_f^D \neq 0$$

čvor C

$$v = 0 \rightarrow M_f = 0$$

$$\varphi \neq 0 \rightarrow T_f \neq 0$$

6



3. Opteretimo fiktivni nosač sa fiktivnim opterećenjem odnosno dijagramom momenata iz tačke 1 sa predznakom minus.

Prenesemo dijagram momenata na fiktivni nosač, obrnemo strelice i tako dobijemo fiktivno opterećenje

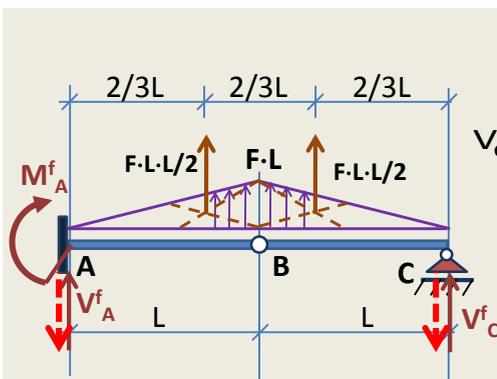
4. Vrednost fiktivnog momenta u čvoru A je vrednost ugiba u čvoru A

Potrebno je da odredimo reakcije fiktivnog nosača

Trougaono podeljeno opterećenje zamenimo silama.

$$H_A^f = 0$$

7



Nije potrebno da crtamo
Dijagrame presečnih sila

Iz 1) $\sum M_B^D = 0$

$$V_C^f \cdot L + F \frac{L^2}{2} \cdot \frac{1}{3} L = 0 \rightarrow V_C^f = -\frac{1}{6} FL^2$$

Iz 2) $\sum V_f = 0$

$$V_A^f + 2 \cdot F \frac{L^2}{2} - F \frac{L^2}{6} = 0$$

$$V_A^f = -\frac{5}{6} FL^2$$

Iz 3) $\sum M_B^L = 0$

$$M_A^f - \frac{5}{6} F \cdot L^2 \cdot L + F \frac{L^2}{2} \cdot \frac{1}{3} L = 0$$

$$M_A^f = \frac{2}{3} FL^3$$

8

Vrednost fiktivnog momenta u čvoru A je vrednost ugiba u čvoru A

$$M_A^f = \frac{2}{3} FL^3 \rightarrow v_A = + \frac{2}{3} \cdot \frac{FL^3}{EI_x}$$



Ugib je pozitivan ako se fiktivni moment poklapa sa pozitivnim smerom momenta

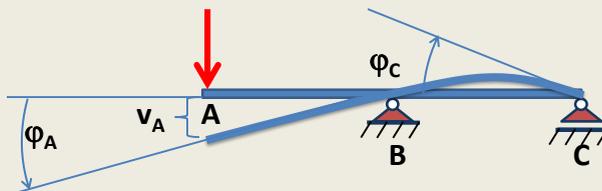
5. Vrednost fiktivnih transverzalnih sila u čvorovima A i C je vrednost nagiba u tim čvorovima

$$\downarrow V_A^f = \frac{5}{6} FL^2 \rightarrow \varphi_A = - \frac{5}{6} \cdot \frac{FL^2}{EI_x} \quad \text{Transverzalna sila je suprotna pozitivnom smeru T sile}$$

$$\downarrow V_C^f = \frac{1}{6} FL^2 \rightarrow \varphi_C = \frac{1}{6} \cdot \frac{FL^2}{EI_x} \quad \text{Transverzalna sila se poklapa sa pozitivnim smerom T sile}$$

Vrednost EI_x se naziva krutost na savijanje i zavisi od materijala grede (E) i njenog poprečnog preseka (I_x)

9

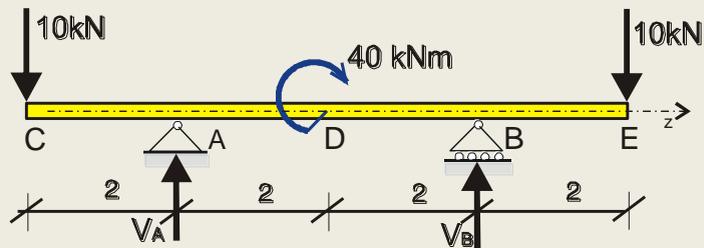


Pozitivan ugib je ugib na dole

Pozitivan nagib je ako je obrtanje tangente u smeru kazaljke na časovniku

10

7.2 Odrediti metodom fiktivnog nosača ugib i nagib u čvoru C



Uslovi ravnoteže

- 1) $\sum H_i = 0$
- 2) $\sum V_i = 0$
- 3) $\sum M_A = 0$

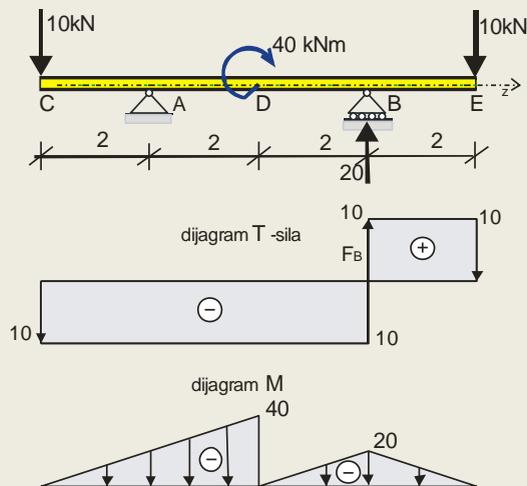
$$3) \sum M_A = 0; \quad -10 \cdot 6 + 40 - V_B \cdot 4 + 10 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_B = 20 \text{ kN}$$

$$2) \sum V = 0; \quad -10 + V_A + V_B - 10 = 0 \rightarrow V_A = 0 \text{ kN}$$

$$1) \sum H = 0; \quad \text{nema hor. sila}$$

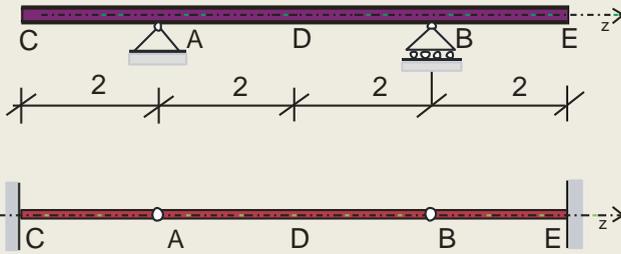
11

Dijagrami presečnih sila na stvarnom nosaču usled spoljašnjeg opterećenja



12

Usvajanje fiktivnog nosača



čvorovi C i E

$$v \neq 0 \rightarrow M_f \neq 0$$

$$\varphi \neq 0 \rightarrow T_f \neq 0$$

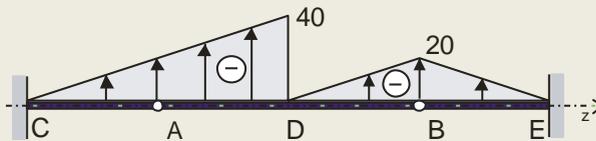
čvorovi A i B

$$v = 0 \rightarrow M_f = 0$$

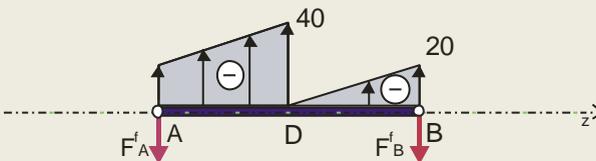
$$\varphi^L = \varphi^D \neq 0 \rightarrow T_f^L = T_f^D \neq 0$$

13

Opretemo fiktivni nosač sa dijagramom momenata sa predznakom -



Fiktivni nosač sa opterećenjem



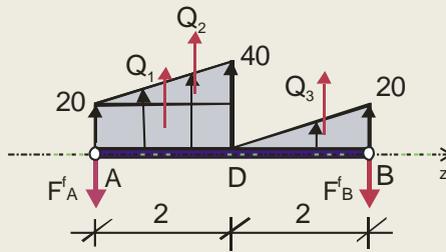
Prosta greda u sredini sa opterećenjem



Konzole na krajevima sa opterećenjem

14

Prosta greda u sredini sa opterećenjem



$$Q_1 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ kN}$$

$$Q_2 = 20 \cdot 2 / 2 = 20 \text{ kN}$$

$$Q_3 = 20 \cdot 2 / 2 = 20 \text{ kN}$$

$$1) \sum M_A = 0; \quad Q_1 \cdot 1 + Q_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + Q_3 \cdot \frac{5}{3} \cdot 2 - V_B^f \cdot 4 = 0$$

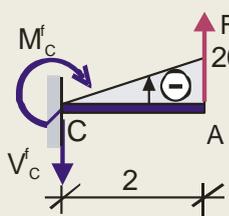
$$40 \cdot 1 + 20 \cdot \frac{4}{3} + 20 \cdot \frac{10}{3} - V_B^f \cdot 4 = 0 \rightarrow V_B^f = 33,33 \text{ kNm}^2$$

$$2) \sum V = 0; \quad -V_A^f + Q_1 + Q_2 + Q_3 - V_B^f = 0$$

$$-V_A^f + 40 + 20 + 20 - 33,33 = 0 \rightarrow V_A^f = 46,67 \text{ kNm}^2$$

15

Krajnja konzola u čvoru C



$$1) \sum M_A = 0; \quad -F_A^f \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + M_C^f = 0$$

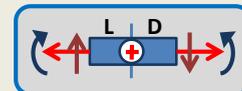
$$-46,67 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + M_C^f = 0 \rightarrow M_C^f = 146,67 \text{ kNm}^3$$

$$2) \sum V = 0; \quad -V_C^f + 20 \cdot 2 / 2 + F_A^f = 0$$

$$-V_C^f + 20 \cdot 2 / 2 + 46,67 = 0 \rightarrow V_C^f = 66,67 \text{ kNm}^2$$

$$M_C^f = 146,67 \rightarrow v_C = \frac{146,67}{EI_x}$$

$$V_C^f = -66,67 \rightarrow \varphi_C = -\frac{66,67}{EI_x}$$



16

Maksvel-Morova metoda jedinične sile

$$f = \int_0^l \frac{M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)}}{EI_x} dz$$

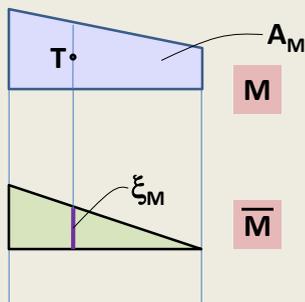
Gde su $M_{x(z)}$ –momenti usled spoljašnjeg opterećenja
 $\bar{M}_{x(z)}$ –momenti usled jedinične sile na mestu tražene deformacije

Metoda Vereščagina

$$f = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz \quad \text{Za konstantnu krutost na savijanje}$$

$\int_0^l M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz$ Dobijamo množenjem dijagrama od spoljašnjeg opterećenja i dijagrama momenata usled jedinične sile

17



$$\int_0^l M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz = \sum A_M \cdot \xi_M$$

Gde su

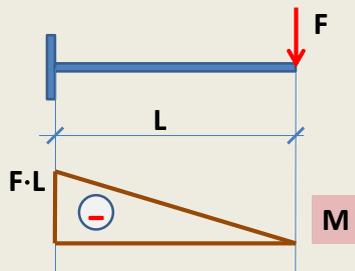
A_M -površina dijagrama momenata usled spoljašnjeg opterećenja

ξ_M -ordinata dijagrama momenata usled jedinične sile na mestu težišta dijagrama momenata od spoljašnjeg opterećenja

18

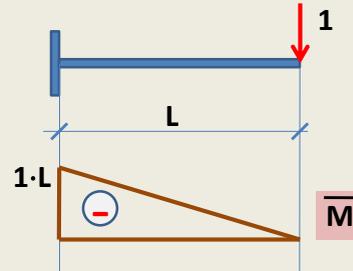
7.3 Odrediti metodom Vereščagina ugib i nagib kraja konzole usled dejstva vertikalne sile F na kraju konzole

Zadati nosač



Dijagram momenata od osnovnog opterećenja

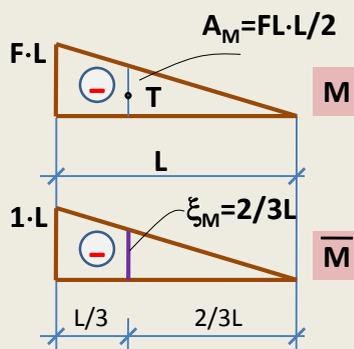
Ugib kraja konzole



Dijagram momenata od jedinične sile na mestu i u pravcu traženog pomeranja

Određivanje ugiba kraja konzole: Opteretimo nosač sa jediničnom silom na mestu traženog pomeranja i u pravcu traženog pomeranja

19



Određivanje ugiba

$$f = \frac{1}{EI_x} \int_0^L M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz$$

$$\int_0^L M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz = \sum A_M \cdot \xi_M$$

$$\sum A_M \cdot \xi_M = \left(-F \cdot L \cdot \frac{L}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}L\right) = \frac{FL^3}{3}$$

$$v = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{FL^3}{3} \quad \text{Ugib kraja konzole}$$

Jedinice: $FL^3 = \text{kN} \cdot \text{m}^3$ $EI_x = \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^4 = \text{kNm}^2$ $v = \frac{\text{kNm}^3}{\text{kNm}^2} = \text{m}$

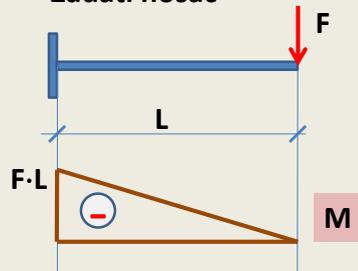
Znak pri množenju dijagrama: U ovom slučaju oba dijagrama momenata su negativna pa je proizvoda pozitivan $- \cdot - = +$

Zaključak: Ako su dijagrami sa iste strane proizvod je +, a ako su sa suprotnih strana nulte linije proizvod je -

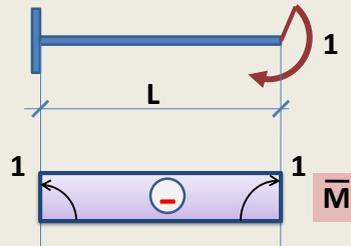
20

7.4 Određivanje nagiba kraja konzole: Opteretimo nosač sa jediničnim momentom na mestu traženog pomeranja i u pravcu traženog pomeranja

Zadati nosač



Nagib kraja konzole



Određivanje ugiba

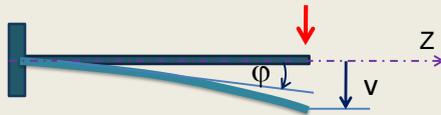
$$f = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz$$

$$\int_0^l M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz = \Sigma A_M \cdot \xi_{\bar{M}} = \Sigma A_M \cdot \xi_{\bar{M}} = (-F \cdot L \cdot \frac{L}{2}) \cdot (-1) = \frac{FL^2}{2}$$

$$\varphi = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{FL^2}{2}$$

Nagib kraja konzole (rad)

21

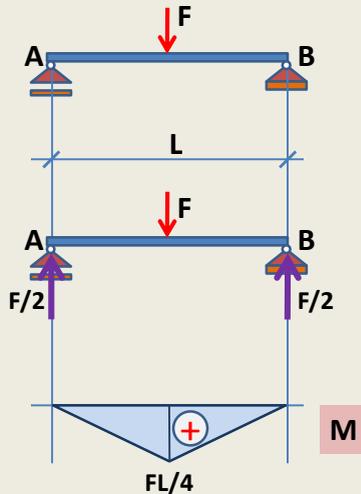


Pozitivan ugib je ugib na dole

Pozitivan nagib je ako je obrtanje tangente u smeru kretanja kazaljke na časovniku

22

7.5 Odrediti metodom Vereščagina ugib u sredini proste grede usled dejstva koncentrisane sile F u sredini grede

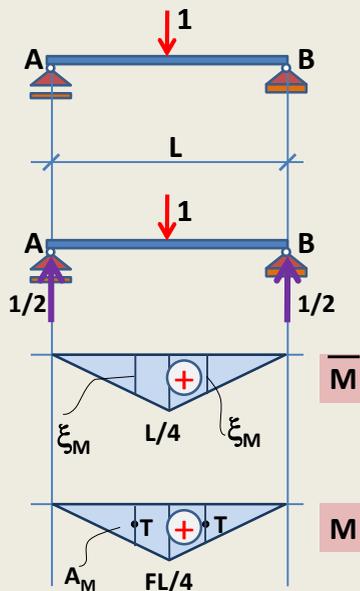


Dijagrami momenata usled spoljašnjeg opterećenja

Reakcije u A i B su jednake i vrednost im je $F/2$

Vrednost momenta u sredini proste grede je $F/2 \cdot l/2 = FL/4$

23



Dijagrami momenata usled jedinične sile u pravcu traženog pomeranja

Reakcije u A i B su jednake i vrednost im je $1/2$

Vrednost momenta u sredini proste grede je $1/2 \cdot L/2 = L/4$

Određivanje ugiba

$$f = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz = \frac{1}{EI_x} \sum A_M \cdot \xi_{SM}$$

$$\sum A_M \cdot \xi_{SM} = 2 \left(\frac{F \cdot L}{4} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{4} \right) = \frac{FL^3}{48}$$

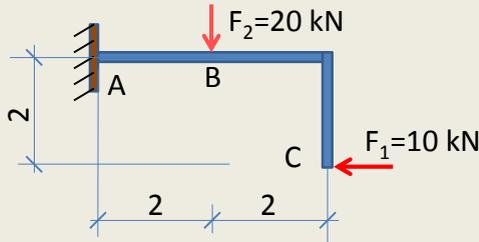
$$v = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{FL^3}{48}$$

Ugib proste grede (m)

24

7.6 Odrediti pomeranje čvora C i obrtanje poprečnog preseka B nosača na slici. Takođe odrediti i promenu rastojanja između tačaka B i C.

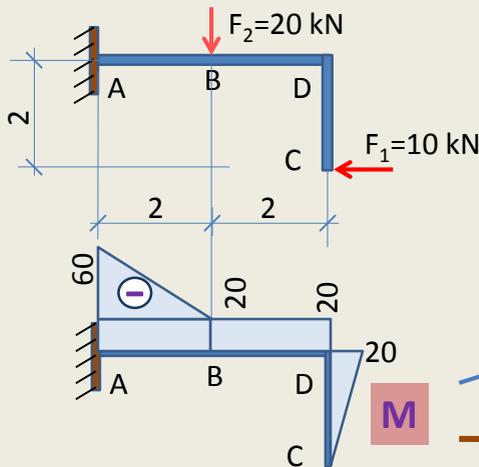
Dato je: $F_1=10$ kN $F_2=20$ kN $E=20$ MN/cm² $I=3000$ cm⁴



Crtanje dijagrama momenata

Za rešenje zadatka potrebni su nam samo dijagrami momenata. Odredićemo dijagrame momenata bez određivanja reakcija oslonaca.

25



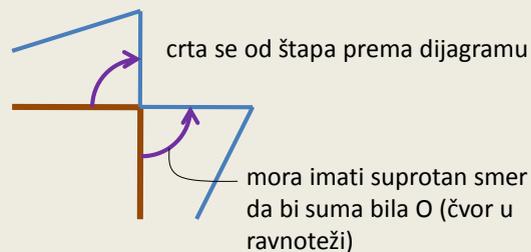
Crtanje dijagrama momenata

$$M^{\text{dole}}_D = -10 \cdot 2 = -20 \text{ kNm}$$

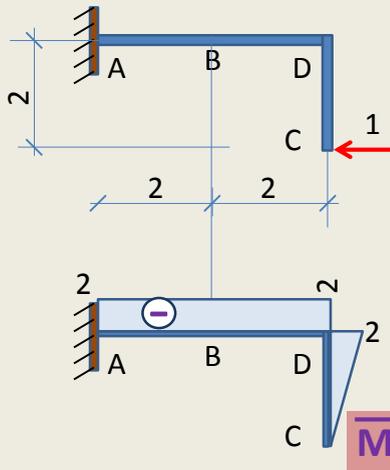
sve do B je isti moment

$$M^{\text{desno}}_A = -10 \cdot 2 - 20 \cdot 2 = -60 \text{ kNm}$$

izjednačavanje momenata u uglu



26



Horizontalno pomeranje čvora C

Otpretimo nosač sa jediničnom silom na mestu traženog pomeranja. Smer pomeranja pretpostavimo (smer strelice).

$$M^{\text{dole}}_D = -1 \cdot 2 = -2 \text{ m}$$

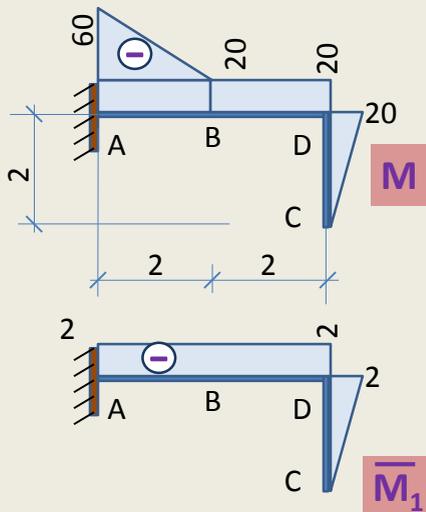
sve do A je isti momenat

Određivanje pomeranja

$$f = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz = \frac{1}{EI_x} \sum A_M \cdot \xi_M$$

za određivanje vrednosti integrala korišćemo tablice u kojima su dati obrasci za množenje dijagrama

27



množenje dijagrama

štap C-D x

$$A_M \cdot \xi_M = \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 2 = 26,67$$

štap B-D x

$$A_M \cdot \xi_M = 2 \cdot 20 \cdot 2 = 80$$

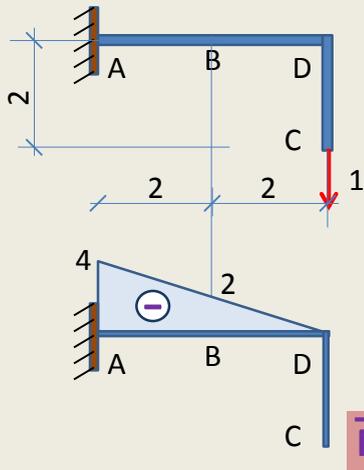
štap A-B x

$$A_M \cdot \xi_M = \frac{2}{2} (60 + 20) \cdot 2 = 160$$

$$\sum A_M \cdot \xi_M = 80 + 26,67 + 160 = 266,67 \text{ kNm}^3$$

$$h_C = \frac{1}{EI_x} \sum A_M \cdot \xi_M = \frac{266,67}{EI_x} = \frac{266,67 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^3 \cdot 3000} = 4,44 \text{ cm}$$

28



Vertikalno pomeranje čvora C

Opteretimo nosač sa jediničnom silom na mestu traženog pomeranja. Smer pomeranja pretpostavimo (smer strelice).

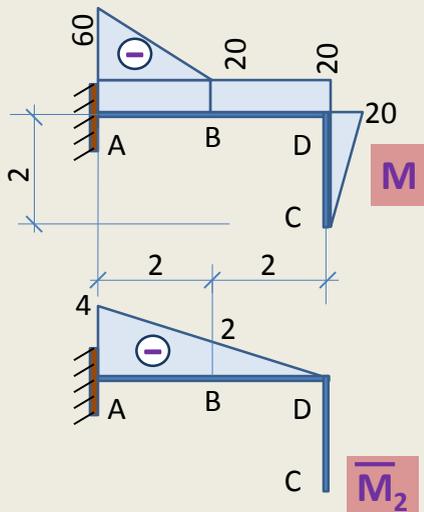
$$M_{Dole}^D = 0$$

$$M_A = -1 \cdot 4 = -4 \text{ m}$$

Određivanje pomeranja

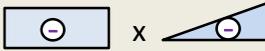
$$f = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz = \frac{1}{EI_x} \sum A_M \cdot \xi_M$$

29

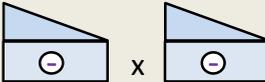


množenje dijagrama

štap C-D $A_M \cdot \xi_M = 0$

štap B-D  \times

$$A_M \cdot \xi_M = \frac{2}{2} 20 \cdot 2 = 40$$

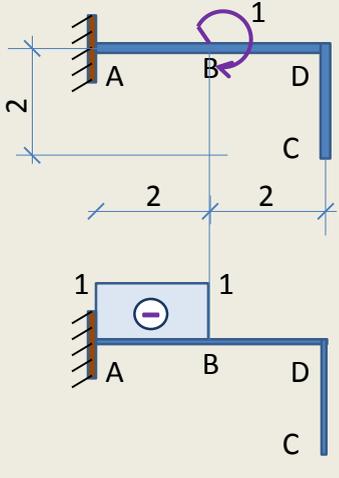
štap A-B  \times

$$A_M \cdot \xi_M = \frac{2}{6} (2(2 \cdot 20 + 60) + 4(20 + 2 \cdot 60)) = 280$$

$$\sum A_M \cdot \xi_M = 40 + 280 = 320 \text{ kNm}^3$$

$$v_C = \frac{1}{EI_x} \sum A_M \cdot \xi_M = \frac{320}{EI_x} = \frac{320 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^3 \cdot 3000} = 5,33 \text{ cm}$$

30



Obrtanje preseka B

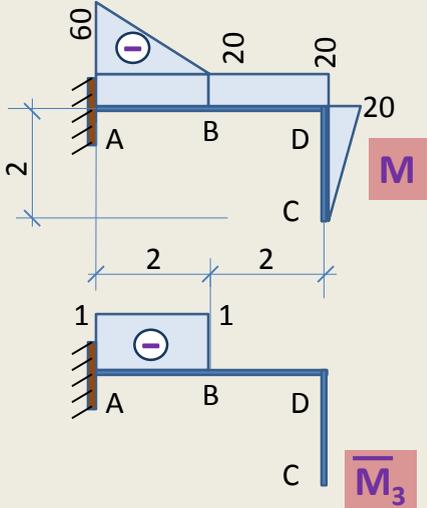
Opteretimo nosač sa jediničnim momentom na mestu traženog obrtanja. Smer obrtanja pretpostavimo (smer strelice).

$M_A = -1$ (nema jedinice)

Određivanje pomeranja

$$f = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz = \frac{1}{EI_x} \sum A_M \cdot \xi_M$$

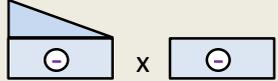
31



množenje dijagrama

štap C-D $A_M \cdot \xi_M = 0$

štap B-D $A_M \cdot \xi_M = 0$

štap A-B 

$$A_M \cdot \xi_M = \frac{2}{2} (20 + 60) \cdot 1 = 80$$

$$\sum A_M \cdot \xi_M = 80 \text{ kNm}^2$$

$$\varphi_B = \frac{1}{EI_x} \sum A_M \cdot \xi_M = \frac{80}{EI_x} = \frac{80 \cdot 10^4}{20 \cdot 10^3 \cdot 3000} = 0,013 \text{ rad}$$

32

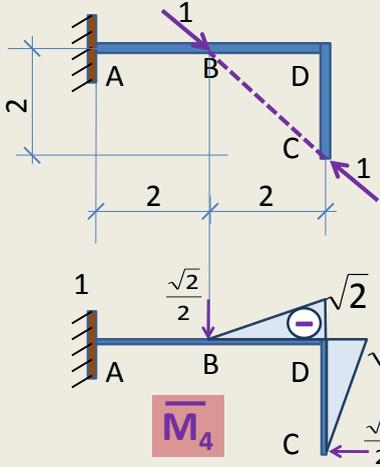
Promena rastojanja između B i C

Opteretimo nosač sa jediničnim silama u pravcu B-C

Momenti se javljaju samo između sila

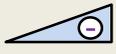
$$M_D = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2}$$

Određivanje pomeranja

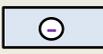
$$f = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{x(z)} \bar{M}_{x(z)} dz = \frac{1}{EI_x} \sum A_M \cdot \xi_M$$


33

množenje dijagrama

štap C-D  x 

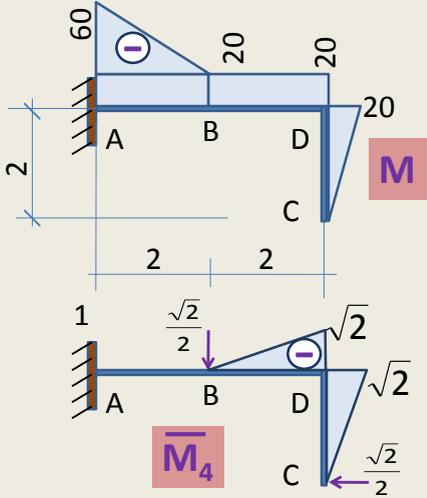
$$A_M \cdot \xi_M = \frac{2}{3} 20 \cdot \sqrt{2} = 18,8$$

štap B-D  x 

$$A_M \cdot \xi_M = \frac{2}{2} 20 \cdot \sqrt{2} = 28,2$$

štap A-B $A_M \cdot \xi_M = 0$

$$\sum A_M \cdot \xi_M = 18,8 + 28,2 = 47 \text{ kNm}^3$$

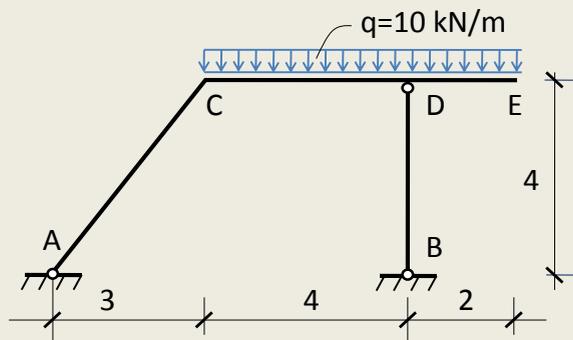
$$\Delta_{B-C} = \frac{1}{EI_x} \sum A_M \cdot \xi_M = \frac{47}{EI_x} = \frac{47 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^3 \cdot 3000} = 0,78 \text{ cm}$$


34

7.7 Za zadati nosač odrediti: a) Dijagrame M, N, T

b) Ugib zgloba E

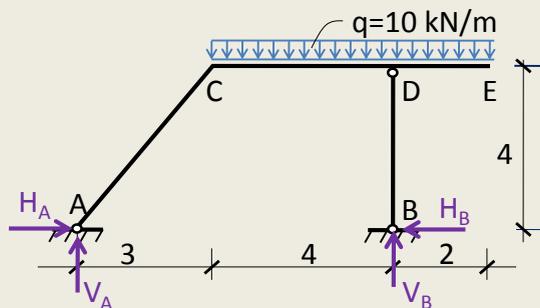
$EI = \text{const.}$



35

Rešenje

Zamenimo oslonce sa reakcijama oslonaca



- 1) $\sum H_i = 0; \quad -H_A + H_B = 0$
- 2) $\sum V_i = 0; \quad V_A - 10 \cdot 6 + V_B = 0$
- 3) $\sum M_A = 0; \quad 10 \cdot 6 \cdot 6 - V_B \cdot 7 = 0$
- 4) $\sum M_D^{\text{dole}} = 0; \quad H_B \cdot 4 = 0$



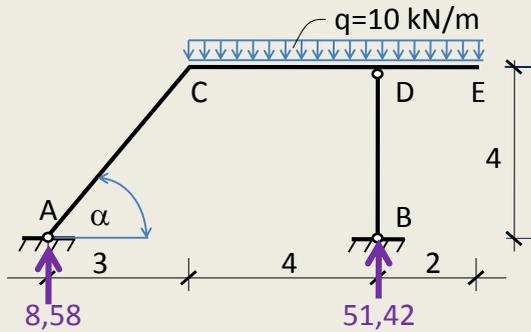
Imamo četiri nepoznate reakcije

Uslovi ravnoteže

- 1) $\sum H_i = 0$
- 2) $\sum V_i = 0$
- 3) $\sum M_A = 0$
- 4) $\sum M_D^{\text{dole}} = 0$

36

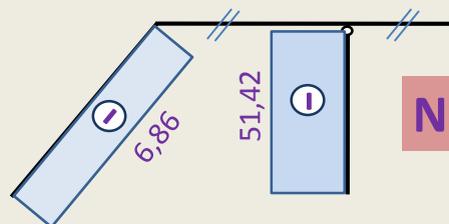
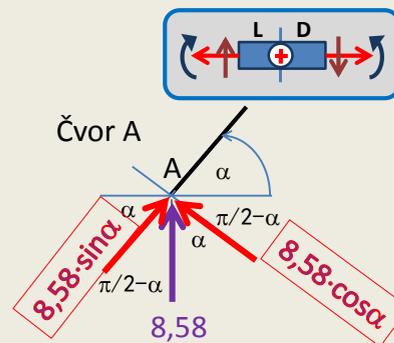
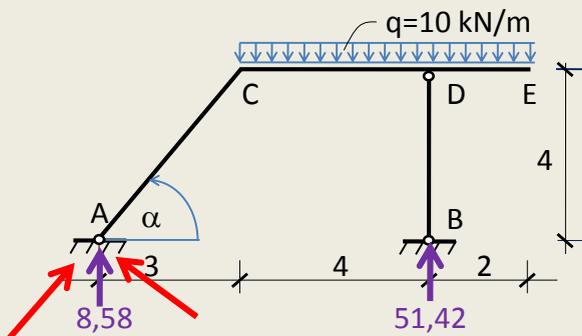
- $\sum M_D^{\text{dole}} = 0; H_B \cdot 4 = 0 \rightarrow H_B = 0$
 1) $\sum H_i = 0; -H_A + 0 = 0 \rightarrow H_A = 0$
 3) $\sum M_A = 0; 360 - V_B \cdot 7 = 0 \rightarrow V_B = 51,42 \text{ kN}$
 2) $\sum V_i = 0; V_A - 60 + 51,42 = 0 \rightarrow V_A = 8,58 \text{ kN}$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{4}{3} \\ \sin \alpha &= \frac{4}{5} \\ \cos \alpha &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

37

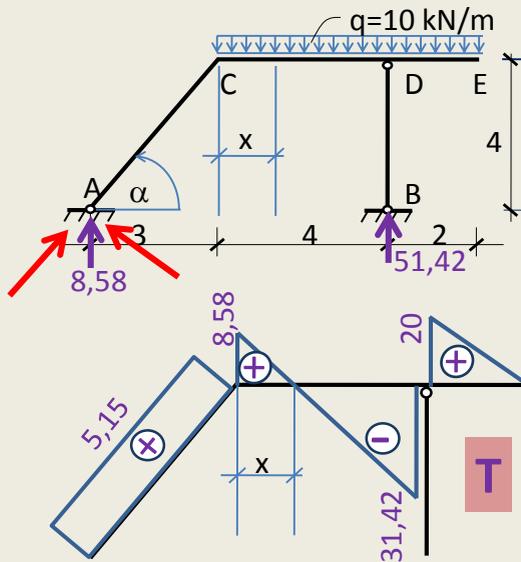
Dijagram normalnih sila



- Štap A-C $N = -8,58 \cdot \sin \alpha = -6,86$
 Štap B-D $N = -51,42$
 Štap D-E $N = 0$
 Štap C-D $N = 0$

38

Dijagram transverzalnih sila

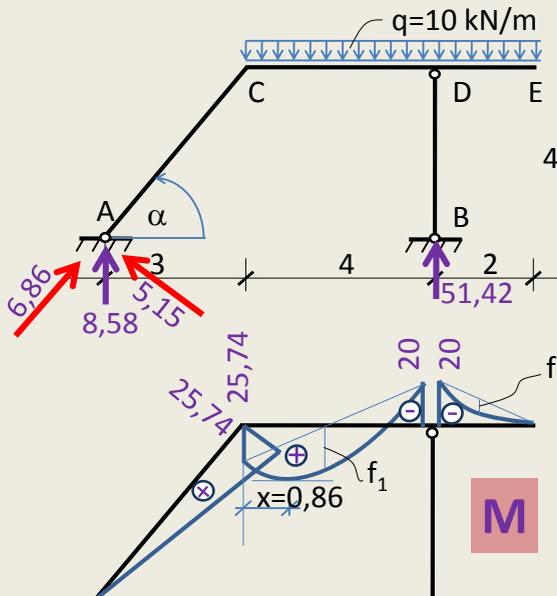


Čvor A $T_A = 8,58 \cdot \cos \alpha = 5,15$
 Čvor C $T_C = 8,58$
 Čvor D^{levo} $T_D^L = 8,58 - 10 \cdot 4 = -31,42$
 Čvor D^{desno} $T_D^D = -31,42 + 51,42 = 20$
 Čvor E $T_E = 0$

$T_x = 0$
 $8,58 - 10 \cdot x = 0$
 $x = 8,58 / 10 = 0,86 \text{ m}$

39

Dijagram momenata savijanja



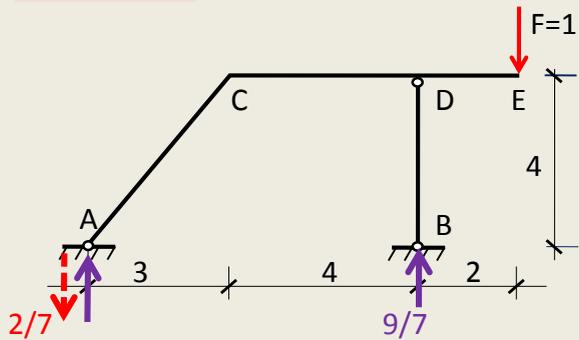
Čvor A $M_A = 0$ (zglob)
 Čvor C^L $M_C^L = 8,58 \cdot 3 = 25,74$
 Čvor C^D $M_C^D = M_C^L$
 Čvor D^L $M_D^L = 8,58 \cdot 7 - 10 \cdot 4 \cdot 2 =$
 $M_D^L = -20 \text{ kNm}$
 Čvor D^D $M_D^D = -10 \cdot 2 \cdot 2 / 2 =$
 $M_D^D = -20 \text{ kNm}$

Čvor E $M_E = 0$
 $f_1 = 10 \cdot 4^2 / 8 = 20$
 $f_2 = 10 \cdot 2^2 / 8 = 5$

Maksimalna vrednost momenta
 $M_x = 8,58 \cdot (3 + 0,86) - 10 \cdot 0,86^2 / 2 =$
 $M_x = 29,42 \text{ kNm}$

40

Ugib čvora E

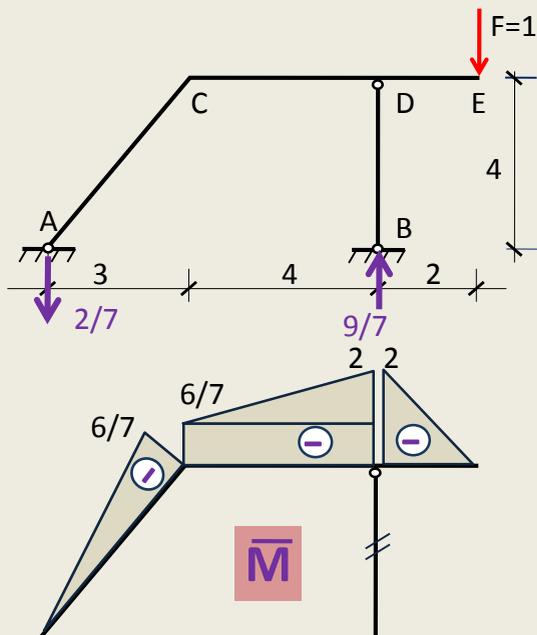


$$1) \sum M_D^{\text{dole}} = 0 \quad H_B = 0$$

$$2) \sum M_A = 0 \quad V_B \cdot 7 - 1 \cdot 9 = 0 \rightarrow V_B = \frac{9}{7}$$

$$2) \sum V = 0 \quad V_A + \frac{9}{7} - 1 = 0 \rightarrow V_A = -\frac{2}{7}$$

41



42

