

OTPORNOST MATERIJALA

Naponi

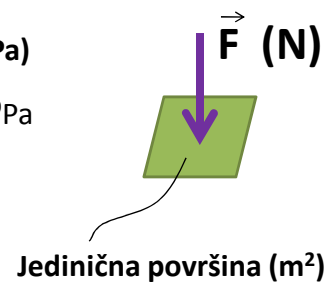
1

ANALIZA NAPONA

Jedinica u Si-sistemu je Paskal (Pa)

$\text{Pa} = \text{N/m}^2$ $\text{MPa} = 10^6 \text{Pa}$ $\text{GPa} = 10^9 \text{Pa}$

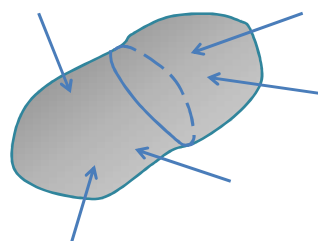
$\text{kN/cm}^2 = 10 \text{ MPa}$ $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$



U tečnostima **pritisak** jedinica $\text{bar} = 10^5 \text{ Pa}$

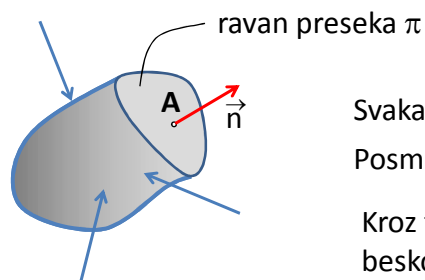
2

TENZOR NAPONA



Telo je opterećeno spoljašnjim silama

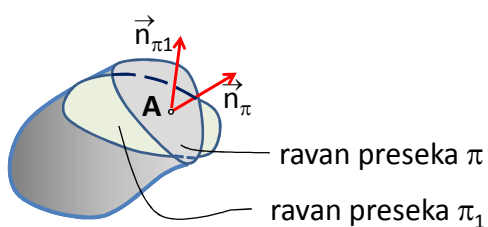
U telu se javljaju reakcije kao unutrašnje sile



Svaka ravan ima normalu na ravan $\vec{n}$
Posmatramo tačku A u ravni π

Kroz tačku A možemo da postavimo beskonačno mnogo ravni π_i

3

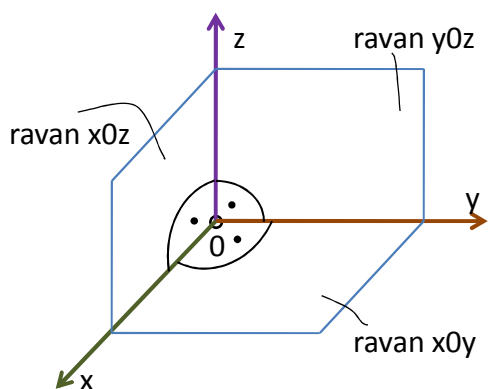


Posmatramo tri ravni kroz tačku O
Ravni su upravne među sobom

Normala ravni yOz je x osa

Normala ravni xOy je z osa

Normala ravni xOz je y osa



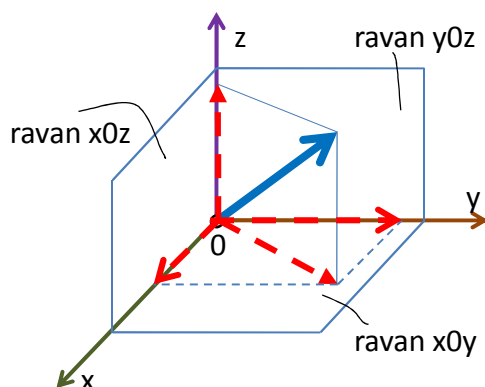
Znači:

svakoj ravni koja je paralelna ravni yOz
normala na ravan je paralelna x osi

svakoj ravni koja je paralelna ravni xOy
normala na ravan je paralelna z osi

svakoj ravni koja je paralelna ravni xOz
normala na ravan je paralelna y osi

4



Svaku silu kroz tačku O možemo Projektovati na jednu od tri ravni i na normalu na tu ravan

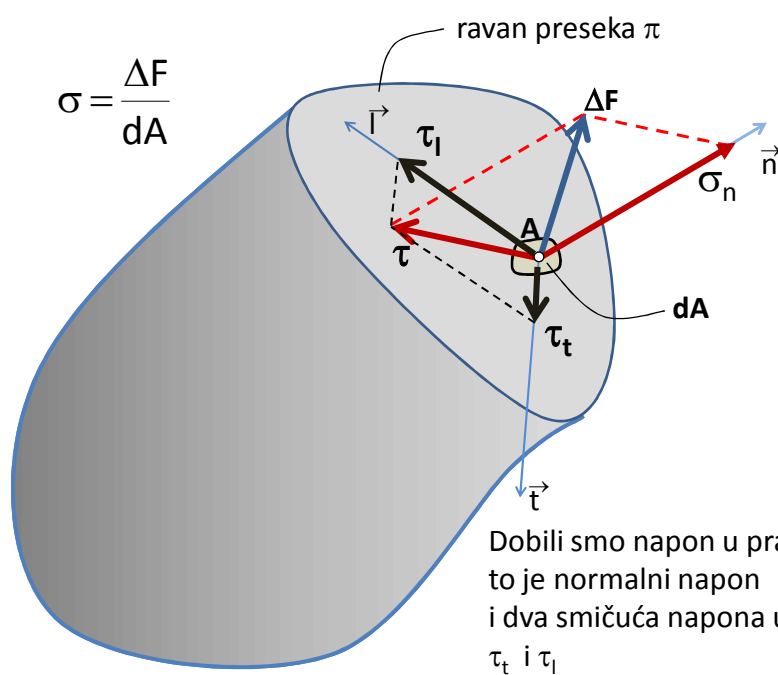
Sve tri sile sada su jednoj kosoj ravni

Sila je prikazana preko projekcija pa nam više nije potrebna

Silu u ravni xOy možemo projektovati na ose x i y
Uklonićemo i tu silu jer je menjaju projekcije

Tako smo dobili projekcije sile na tri upravna pravca

5



6

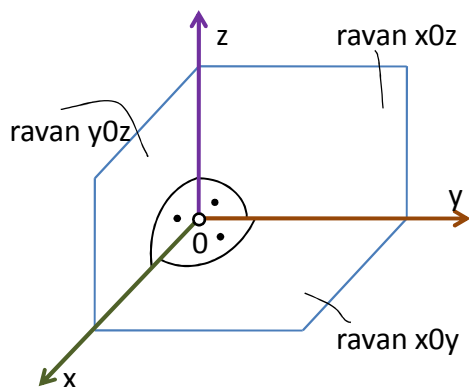
Znači:

za jednu ravan kroz taču A imamo jedan normalni i dva smičuća napona

Kroz tačku A imamo beskonačno mnogo ravni a samim tim i beskonačno mnogo normalnih i smičućih napona

Može se pokazati da je stanje napona u tački poznato ako su poznate normalne i smičuće komponente napona za tri međusobno upravne ravni

Ako su to ravni koordinatnog sistema tada su to naponi



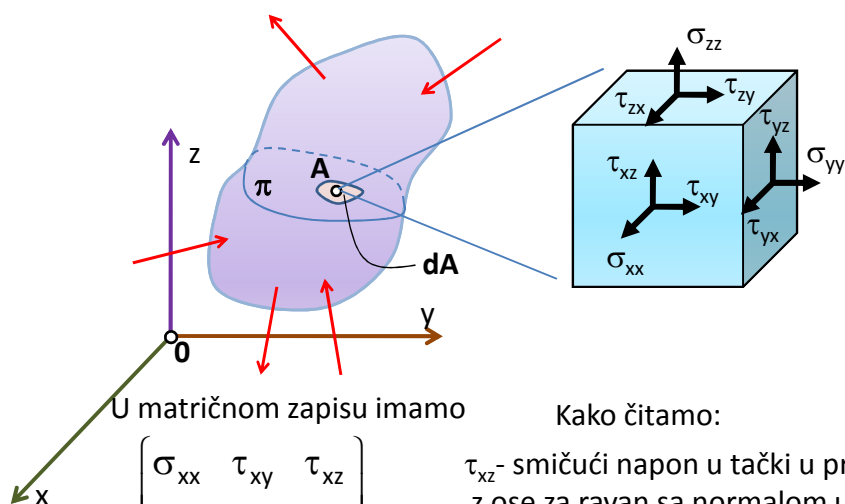
Normalni naponi

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy} \text{ i } \sigma_{zz}$$

Smičući naponi

$$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx} \text{ i } \tau_{zy}$$

7

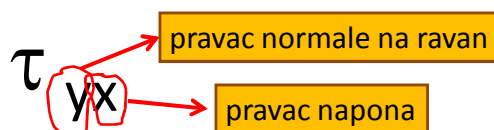


U matričnom zapisu imamo

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

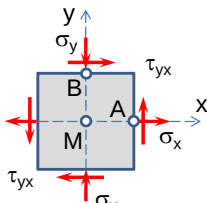
Kako čitamo:

τ_{xz} - smičući napon u tački u pravcu z ose za ravan sa normalom u x pravcu



8

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix} \quad \text{Košijev tenzor napona-prostorno stanje napona}$$



$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{Bmatrix} \quad \text{ravno stanje napona}$$



$$\sigma = \{\sigma_x\} \quad \text{linearno stanje napona}$$

9

Dokazano da su van dijagonalni elementi tenzora napona jednaki
Stav o konjugovanosti smičućih napona

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Tako da je za poznavanje napona u tački potrebno poznavati
Tri normalna napona i tri smičuća napona

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

10

RAVNO STANJE NAPONA

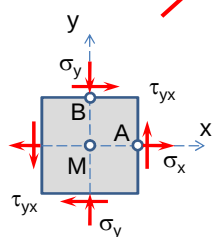
Ako naponi deluju u ravni, odnosno nema komponenti u pravcu z ose
Tada je naponsko stanje ravno

Normalni naponi

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy} \text{ i } \sigma_{zz}$$

Smičući naponi

$$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx} \text{ i } \tau_{zy}$$

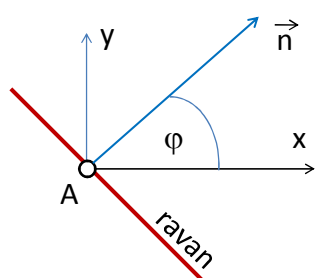


$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{Bmatrix}$$

Tenzor napona
za ravno stanje napona

11

Naponi i proizvoljnoj ravni čija normala zaklapa ugao φ sa x osom



Poznajemo napon

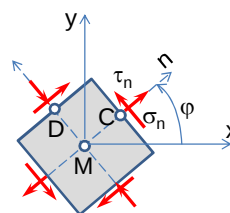
$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{Bmatrix}$$

-normalni napon

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

-smičući napon

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi$$



12

Pitanje gde su normalni naponi najveći (glavni naponi)

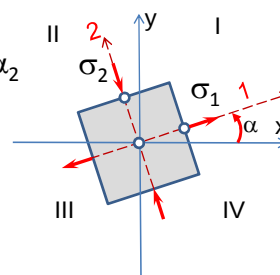
Ugao pod kojim se nalazi normala na ravan glavnih napona

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Dobijamo dva međusobno upravna pravca α_1 i α_2

Ako je $\tau_{xy} > 0$ osa 1 prolazi kroz I i III kvadrant

Ako je $\tau_{xy} < 0$ osa 1 prolazi kroz II i IV kvadrant



Vrednosti glavnih napona tada su

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \text{-maksimalni glavni napon}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \text{-minimalni glavni napon}$$

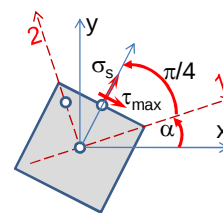
13

*U ravni glavnih osa smičući napon je jednak nuli. $\tau=0$

Ekstremne vrednost smičućih napona dobijamo kao

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Koji deluje u ravni sa normalom pod uglom $\alpha+45^\circ$



Njemu odgovarajući normalni napon je

$$\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

14

Morov krug napona

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

To je jednačina kruga sa centrom

$$C \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; 0 \right)$$

i poluprečnikom

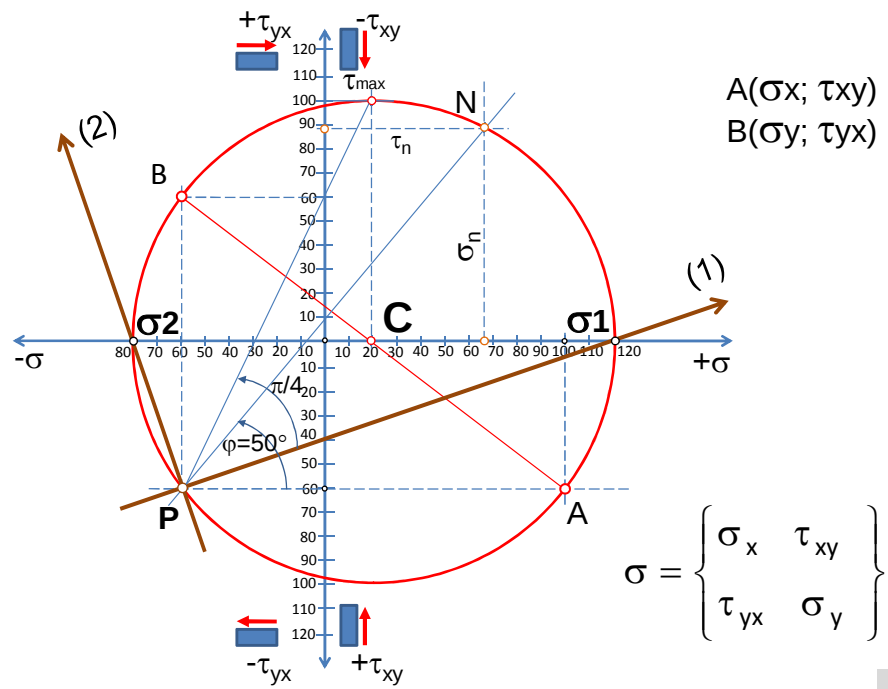
$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

15

Kako ga konstruišemo

1. Nacrtamo koordinatni sistem σ 0τ
2. Odredimo tačke $A(\sigma_x; \tau_{xy})$ $B(\sigma_y; \tau_{yx})$
3. Spojimo tačke A i B i gde seku σ osu tu je centar kruga
4. Opišemo krug iz centra a da prolazi kroz tačke A i B. U krajnjim Presecima kruga sa σ osom dobijamo ekstremne vrednosti napona σ_1 i σ_2
5. Odredimo pol P (povučemo iz A horizontalno a iz B vertikalnu pravu) . One se seku na krugu. To je pol P
6. Glavni pravci se dobijaju spajanjem pola P sa maksimalnim vrednostima napona σ_1 i σ_2

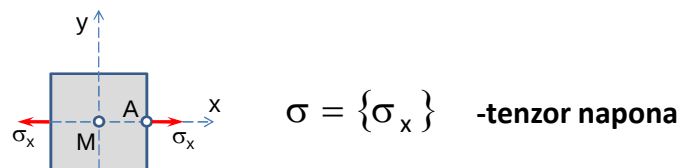
16



Specijalna naponska stanja

-Linearno stanje napona - pritisak i zatezanje

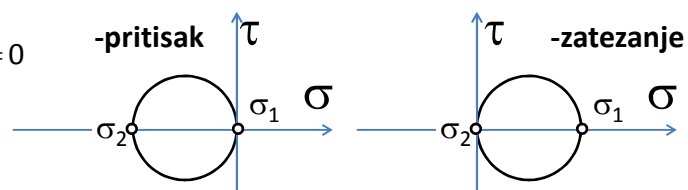
$\sigma_x > 0$ - zatezanje $\sigma_x < 0$ - pritisak



$$\sigma_y = 0 \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sigma_x \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2}$$

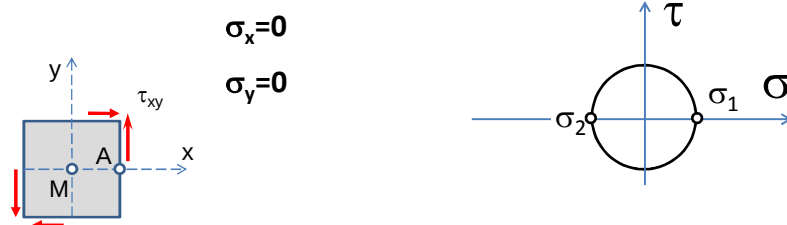
$$\sigma_1 = \sigma_x \quad \sigma_2 = 0$$



18

Specijalna naponska stanja

-Čisto smicanje



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{0 + 4\tau_{xy}^2} = \pm \tau_{xy}$$

Specijalna naponska stanja

-Izotropno stanje



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} 2\sigma_x \pm \frac{1}{2} \sqrt{0 + 0} = \sigma_x$$

$$\sigma_1 = \sigma_x$$

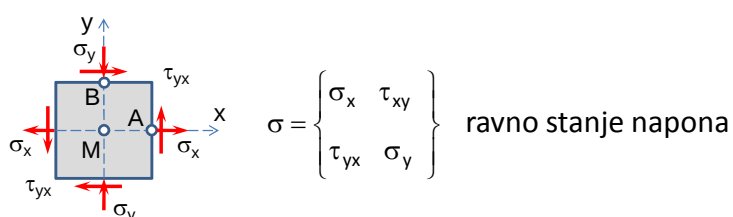
$$\sigma_2 = \sigma_x$$

ZADATAK 2.1

U tački M zadato je ravno stanje napona $\sigma = \begin{Bmatrix} 100 & 60 \\ 60 & -60 \end{Bmatrix}$ (Mpa)

Odrediti analitički i grafički pomoću Morovog kruga napona:

- normalni i smičući napon u ravni čija normala zaklapa ugao od $\varphi=50^\circ$ sa x-osom,
- glavne pravce i glavne napone
- maksimalni smičući napon i odgovarajući normalni napon
- skicirati orjentirane elemente u tački M za svaki koordinatni sistem sa ucrtanim komponentama napona.



21

ANALITIČKO REŠENJE

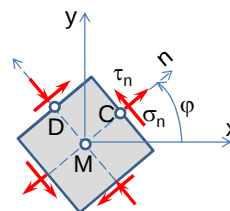
a) Vrednosti napona u zarotiranom koordinatnom sistemu slika b) dati su izrazima

-normalni napon

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

-smičući napon

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi$$



22

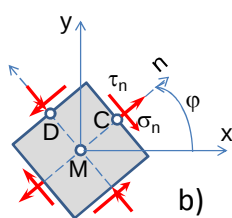
vrednosti trigonometrijskih funkcija

$$\cos 2\varphi = \cos(100^\circ) = -0.17365$$

$$\sin 2\varphi = \sin(100^\circ) = 0.98481$$

$$\sigma_n = \frac{100 - 60}{2} + \frac{100 + 60}{2}(-0.17365) + 60 \cdot 0.98481 = 65.20 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = \frac{100 + 60}{2} \cdot 0.98481 - 60 \cdot (-0.17365) = 89.20 \text{ MPa}$$



*na slici b) prikazani su ovi naponi.

Normalni napon je pozitivan i smer mu je u smeru normale na ravan. Smičući napon je pozitivan i deluje u smeru kao na slici.

Pozitivan smer se dobija kada se rotacijom u pozitivnom matematičkom pravcu smer napona poklopi sa smerom normale na ravan.

23

Glavni pravci i glavni naponi

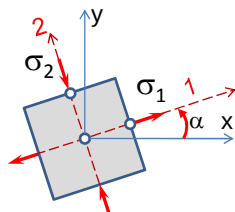
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{100 - 60}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(100 + 60)^2 + 4 \cdot 60^2}$$

$$= 20 \pm \frac{1}{2} \sqrt{40000} = 20 \pm 100 \Rightarrow \sigma_1 = 120 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -80 \text{ MPa}$$

ugao koji glavni pravac zaklapa sa pozitivnim delom x ose

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{2 \cdot 60}{(100 + 60)} = 0.75 \Rightarrow 2\alpha = 36.87^\circ \rightarrow \alpha = 18.435^\circ$$

ugao α nanosimo u pozitivnom matematičkom smeru od ose x



*U ravni glavnih osa smičući napon je jednak nuli. $\tau=0$

24

Maksimalni smičući napon

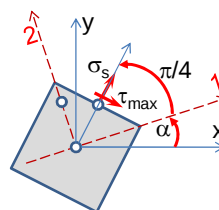
$$\tau_{xy\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(100 + 60)^2 + 4 \cdot 60^2} = 100 \text{ MPa}$$

ravni u kojoj je smičući napon maksimalan zaklapa sa glavnim pravcima ugao od $\pi/4$ (45°)

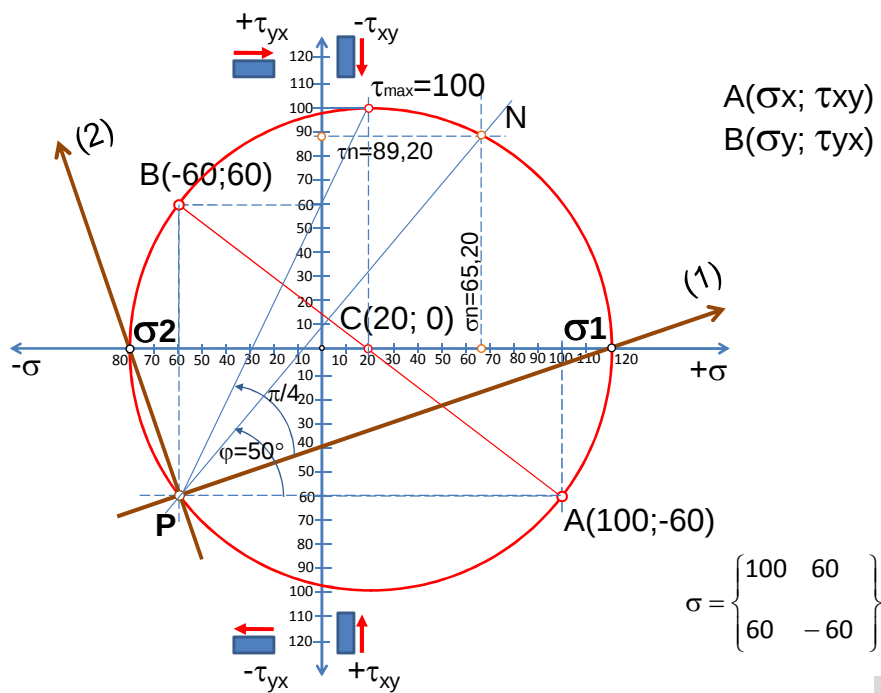
U odnosu na x osu taj ugao je $\alpha + \pi/4 = 18.435^\circ + 45^\circ = 63.435^\circ$

odgovarajući normalni napon

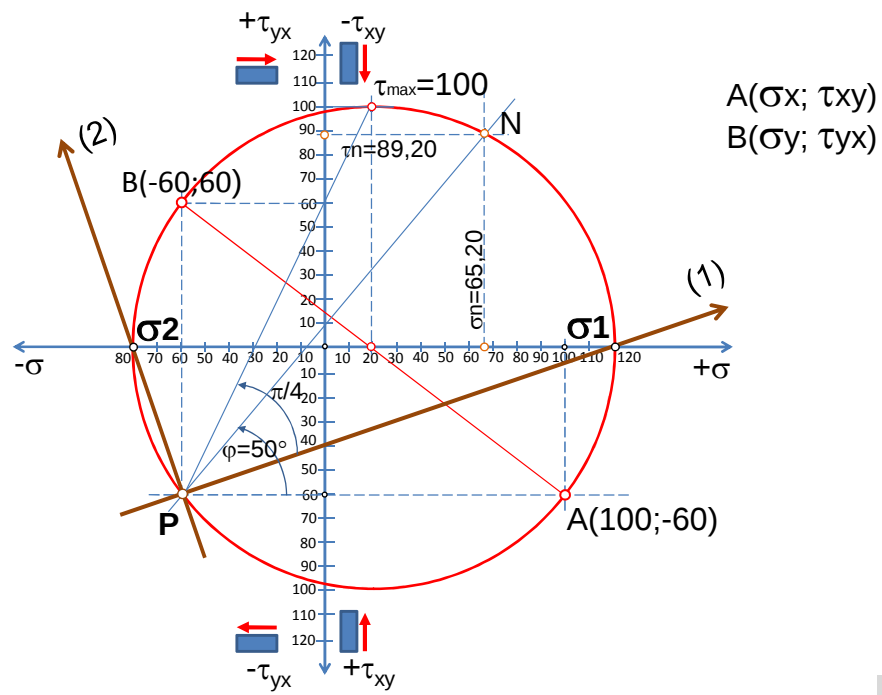
$$\sigma_s = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 - 60}{2} = 20 \text{ MPa}$$



25



26



27