

Osnovne vrste naprezanja:

Aksijalno naprezanje

Smicanje

Uvijanje

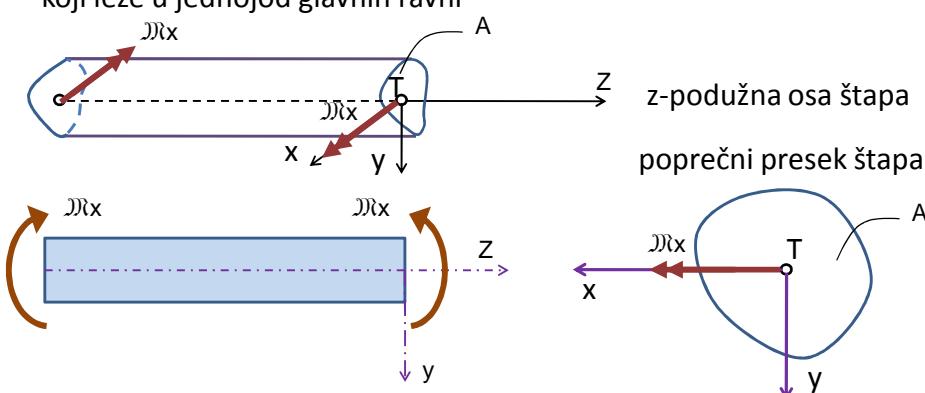
Savijanje

Izvijanje

1

ČISTO PRAVO SAVIJANJE

Štap je opterećen na basisima sa dva jednakna i suprotna sprega M_x koji leže u jednoj od glavnih ravnih



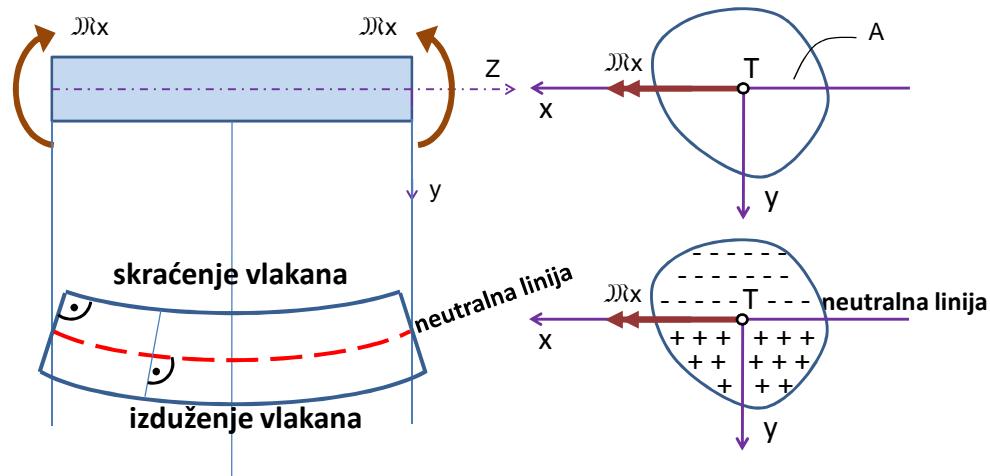
M_x -moment u ravni y_0z (jedna od glavnih ravnih)

x i y -glavne centralne ose inercije

Ovako opterećena greda je u stanju **čistog pravog savijanja**

2

Napon kod čistog pravog savijanja



3

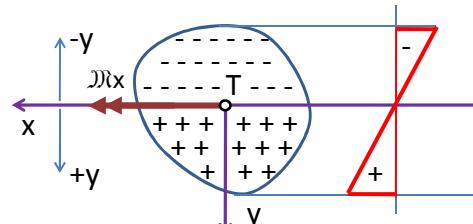
U analizi deformacija i naprezanja pri čistom savijanju pretpostavlja se sledeće:

- Ravni poprečni preseci ostaju pri deformaciji štapa ravni i upravni na savijenu osu štapa (Bernoullieva hipoteza).
- Materijal štapa smatramo homogenim i izotropnim.
- Između uzdužnih vlakana nema nikakvog uzajamnog delovanja sila.
- Normalni naponi proporcionalni su deformacijama (Hookeov zakon).

4

Napon u nekoj tački preseka kod čistog pravog savijanja je jednak

$$\sigma_z = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} \cdot y$$



gde su

\mathfrak{M}_x – momenat savijanja u posmatranom preseku

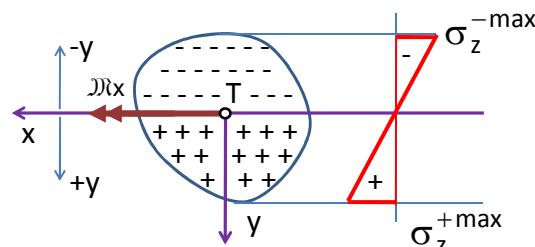
I_x – momenat inercije za glavnu x osu

y – rastojanje posmatrane tačke preseka od x ose

5

Naponi su najveći u tački gde je najveće udaljenje od x ose

$$\sigma_z^{\max} = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} \cdot y_{\max}$$



Najveći napon zatezana je u tački gde je y maksimalno na zategnutoj strani preseka

$$\sigma_z^{+\max} = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} \cdot y_{\max}^+ = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} = \frac{\mathfrak{M}_x}{W_x^+}$$

W_x^+ – Otporni momenat preseka na zategnutoj strani

6

Najveći napon pritiska je u tački gde je y maksimalno na pritisnutoj strani preseka

$$\sigma_z^{-\max} = \frac{\mathcal{M}_x}{I_x} \cdot y_{\max}^{-} = \frac{\mathcal{M}_x}{I_x} = \frac{\mathcal{M}_x}{W_x^{-}}$$

W_x^{-} – Otporni momenat preseka na pritisnutoj strani

Rezime

Normalni napon kod čistog pravog savijanja u opštem obliku je jednak

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{M}_x}{W_x}$$

napon=Momenat kroz Otporni momenat

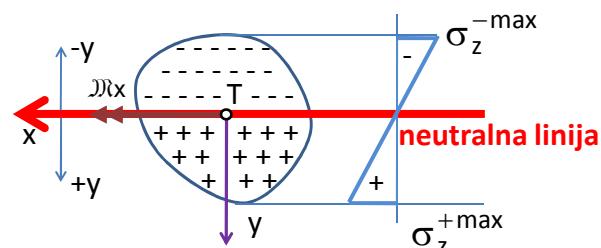
7

Neutralna linija kod čistog pravog savijanja

Neutralna linija je mesto tačaka preseka gde je napon jednak nuli

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{M}_x}{I_x} \cdot y = 0$$

$$\text{kako je } \frac{\mathcal{M}_x}{I_x} \neq 0$$



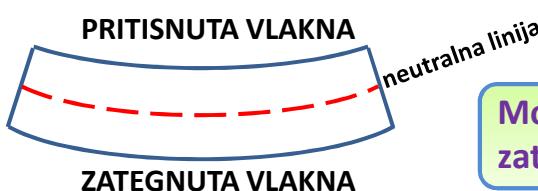
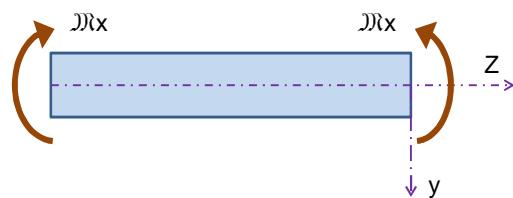
sledi da je jednačina neutralne linije kod čistog pravog savijanja

data jednačinom **$y=0$** a to je jednačina x ose

Neutralna linija se poklapa sa glavnom X osom

8

ZNAK MOMENTA



Momenat je pozitivan kada zateže donju stranu

9

Primer 5.1

Greda poprečnih preseka kao na slici opterećena je pozitivnim momentom savijanja $\mathfrak{M}_x=54 \text{ kNm}$. Odrediti napone u naznačenim tačkama A, B i C.

a)

$$\sigma_z = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} \cdot y = 0 \quad I_x = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 6667 \text{ cm}^4$$

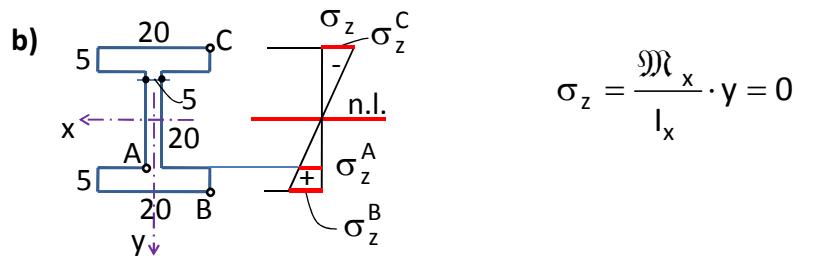
$$\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{6667} \cdot y$$

$$\text{tačka A: } y=0 \quad \sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{6667} \cdot 0 = 0$$

$$\text{tačka B: } y=-10 \quad \sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{6667} \cdot (-10) = -8,10 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{tačka C: } y=10 \quad \sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{6667} \cdot 10 = 8,10 \text{ kN/cm}^2$$

10



$$I_x = \frac{20 \cdot 5^3}{12} \cdot 2 + \frac{5 \cdot 20^3}{12} + 2 \cdot 12,5^2 \cdot 20 \cdot 5 = 35000 \text{ cm}^4$$

tačka A: $y=10$ $\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{35000} \cdot 10 = 1,54 \text{ kN/cm}^2$

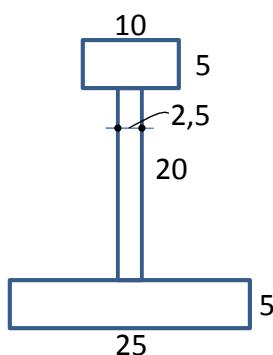
tačka B: $y=15$ $\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{35000} \cdot 15 = 2,31 \text{ kN/cm}^2$

tačka C: $y=-15$ $\sigma_z = \frac{54 \cdot 10^2}{35000} \cdot (-15) = -2,31 \text{ kN/cm}^2$

11

Primer 5.2

Poprečni presek grede od livenog gvožđa raspona $l=4 \text{ m}$ dat je na slici. Odrediti intenzitet sile P koja može da deluje na sredini raspona grede ako je dozvoljeni napon zatezanja $\sigma_{\text{doz}}=16 \text{ kN/cm}^2$. Koliki će pri tom biti napon pritiska.



12

Potrebno je prvo odrediti položaj težišta poprečnog preseka

Podelili smo složenu površinu na tri proste površine

Površina je simetrična oko y ose pa pa je težište po x pravcu određeno

Odredićemo položaj pojedinačnih težišta po y pravcu

$$y_{T1} = 5 + 20 + 2,5 = 27,5 \text{ cm}$$

$$y_{T2} = 5 + 10 = 15 \text{ cm}$$

$$y_{T3} = 2,5 \text{ cm}$$

Pojedinačne površine su

$$A_1 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$$

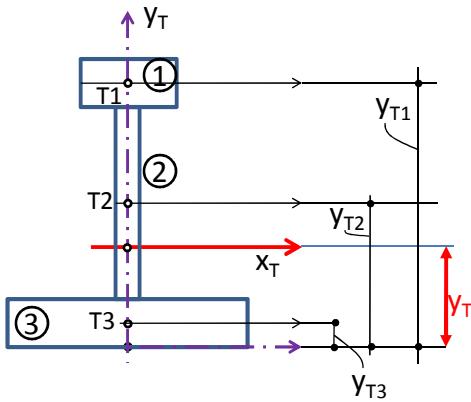
$$A_2 = 20 \cdot 2,5 = 50 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 25 \cdot 5 = 125 \text{ cm}^2$$

Položaj težišta je

$$y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_{Ti}}{\sum A_i} = \frac{50 \cdot 27,5 + 50 \cdot 15 + 125 \cdot 2,5}{50 + 50 + 125}$$

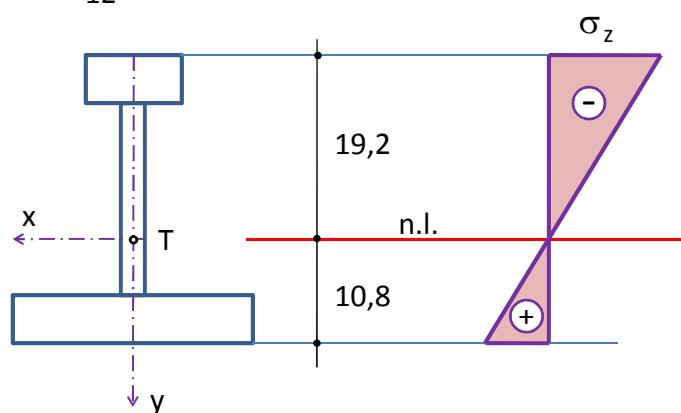
$$y_T = 10,8 \text{ cm}$$



13

Određujemo sada aksijalni momenat inercije oko ose x

$$I_x = I_x^S + I_x^P = \frac{10 \cdot 5^3}{12} + 50 \cdot (27,5 - 10,8)^2 + \frac{2,5 \cdot 20^3}{12} + 50 \cdot (15 - 10,8)^2 + \frac{25 \cdot 5^3}{12} + 125 \cdot (10,8 - 2,5)^2 = 25470 \text{ cm}^4$$



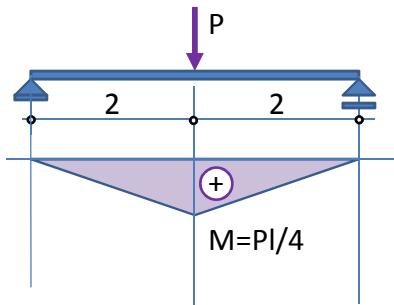
14

Otporni momenti na zategnutoj i pritisnutoj ivici su

$$W_x^+ = \frac{I_x}{y_{\max}^+} = \frac{25470}{10,8} = 2358,33 \text{ cm}^3$$

$$W_x^- = \frac{I_x}{y_{\max}^-} = \frac{25470}{19,2} = 1326,56 \text{ cm}^3$$

Određivanje statičkih uticaja za nosač



$$M = Pl/4$$

$$\sigma_z = \frac{M}{W_x} = \sigma_{\text{dop}}$$

$$M_x = W_x^+ \cdot \sigma_{\text{dop}}$$

15

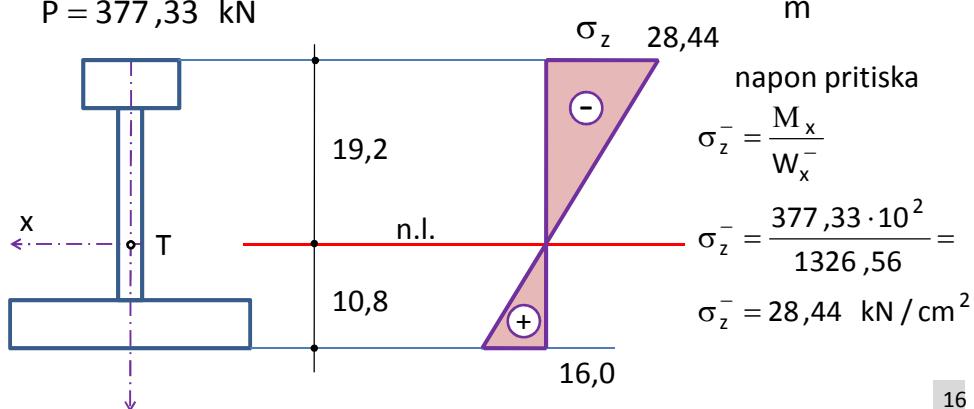
$$W_x^+ = 2358,33 \text{ cm}^3$$

$$M_x = 2358,33 \cdot 16 = 37733,28 \text{ kNm} = 377,33 \text{ kNm}$$

$$M_x = \frac{P \cdot l}{4} \rightarrow P = \frac{4M_x}{l} = \frac{4 \cdot 377,33}{4}$$

$$P = 377,33 \text{ kN}$$

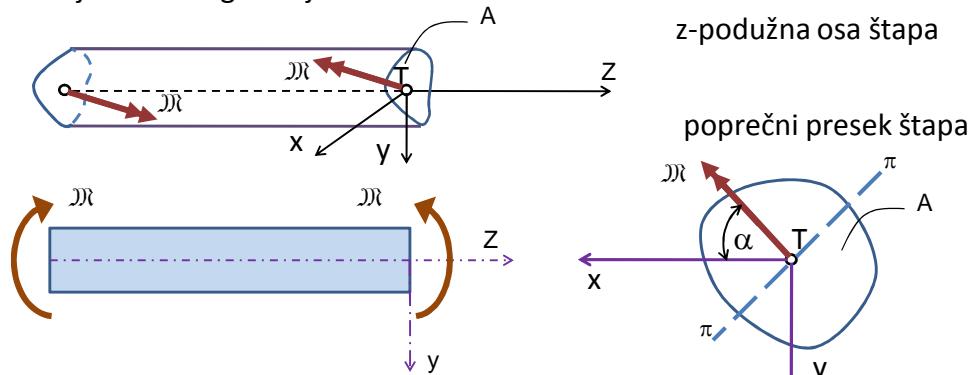
jedinice
 $P = \frac{\text{kNm}}{\text{m}} = \text{kN}$



16

ČISTO KOSO SAVIJANJE

Štap je opterećen na bazisima sa dva jednaka a suprotna sprega M_x koji ne leže u glavnoj ravni

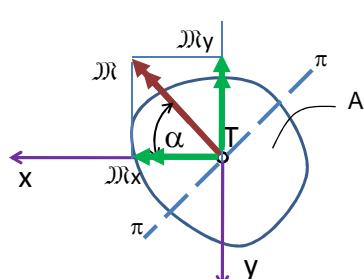


M_x -momenat u ravni $\pi-\pi$ čija normala zaklapa ugao α sa x osom
x i y-glavne centralne ose inercije

Ovako opterećena greda je u stanju **čistog kosog savijanja**

17

Napon kod čistog pravog savijanja



$$M_x = M \cdot \cos \alpha$$

$$M_y = M \cdot \sin \alpha$$

zamenimo u izraz za napon

$$\sigma_z = \frac{M \cdot \cos \alpha}{I_x} \cdot y + \frac{M \cdot \sin \alpha}{I_y} \cdot x = M \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{I_y} \cdot x \right)$$

Spreg razlažemo na dva upravna sprega M_x i M_y koji prave dva čista prava savijanja

Napon je tada jednak

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

odnosno

$$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

18

Položaj neutralne linije

U tačkama neutralne linije napon je jednak nuli, pa zato izjednačimo izraz za napon sa nulom

$$\mathfrak{M} \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{I_y} \cdot x \right) = 0 \quad \text{momenat savijanja je različit od nule pa ostaje}$$

$$\frac{\cos \alpha}{I_x} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{I_y} \cdot x = 0$$

$$y = - \left(\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \right) \cdot x$$

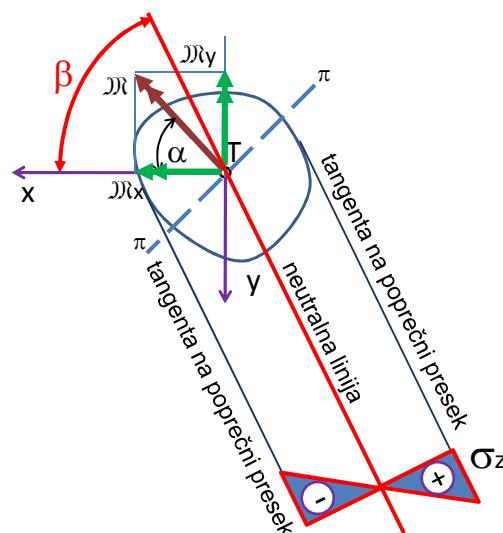
jednačina neutralne linije

To je prava koja prolazi kroz koordinatni početak odnosno težište poprečnog preseka i zaklapa ugao β sa pozitivnim delom x ose

$$y = \operatorname{tg} \beta \cdot x$$

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha$$

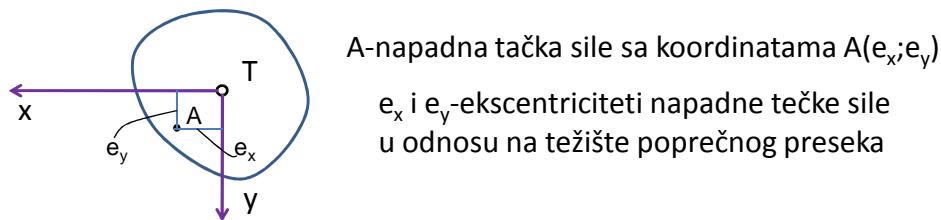
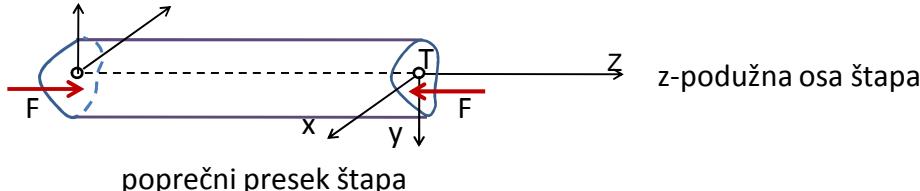
19



20

EKSCENTRIČNO NAPREZANJE GREDE

Štap je opterećen na bazisima sa dva jednake sile suprotnog smera koje ne deluju u težištu poprečnog preseka

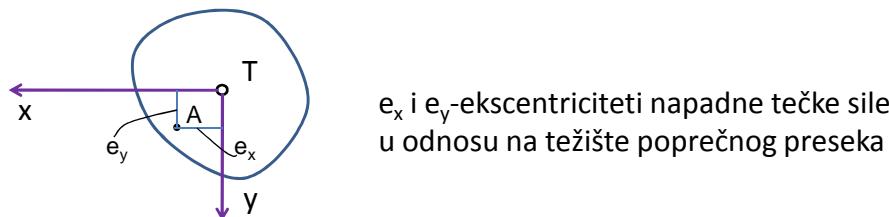


21

Redukujemo silu F na težište i dobijamo

1. Istu tu silu F
2. Dva momenta oko težišnih osa M_x i M_y gde su

$$M_x = -F \cdot e_y \quad M_y = -F \cdot e_x$$



Ukupan napon sada je jednak (važi princip superpozicije)

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

aksijalno naprezanje čisto koso savijanje

22

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} + \frac{\mathcal{M}_x}{I_x} \cdot y + \frac{\mathcal{M}_y}{I_y} \cdot x \quad \mathcal{M}_x = -F \cdot e_y \quad \mathcal{M}_y = -F \cdot e_x$$

Zamenimo \mathcal{M}_x i \mathcal{M}_y u izraz za napon i dobijemo

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot e_y}{I_x} \cdot y - \frac{F \cdot e_x}{I_y} \cdot x$$

Uvodimo sada minimalni poluprečnik inercije

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \rightarrow i_x^2 = \frac{I_x}{A} \rightarrow I_x = A \cdot i_x^2$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \rightarrow i_y^2 = \frac{I_y}{A} \rightarrow I_y = A \cdot i_y^2 \quad \text{pa je sada}$$

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot e_y}{A \cdot i_x^2} \cdot y - \frac{F \cdot e_x}{A \cdot i_y^2} \cdot x = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_y}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_x}{i_y^2} \cdot x \right)$$

23

NAPON KOD EKSCENTRIČNOG PRITISKA JE

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_y}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_x}{i_y^2} \cdot x \right)$$

Neutralna linija je data izrazom

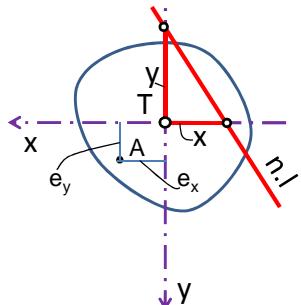
$$\sigma_z = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_y}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_x}{i_y^2} \cdot x \right) = 0 \quad \text{odnosno}$$

$$\left(1 + \frac{e_y}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_x}{i_y^2} \cdot x \right) = 0 \quad \text{jednačina neutralne linije}$$

24

$$\left(1 + \frac{e_y}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_x}{i_y^2} \cdot x \right) = 0$$

jednačina neutralne linije



To je prava koja ne prolazi kroz težište (koordinatni početak)

Presek te prave sa x osom dobija se kada se u jednačinu za neutralnu liniju stavi $y=0$

$$1 + \frac{e_x}{i_y^2} \cdot x = 0 \rightarrow x = -\frac{i_y^2}{e_x}$$

odsečak na x osi

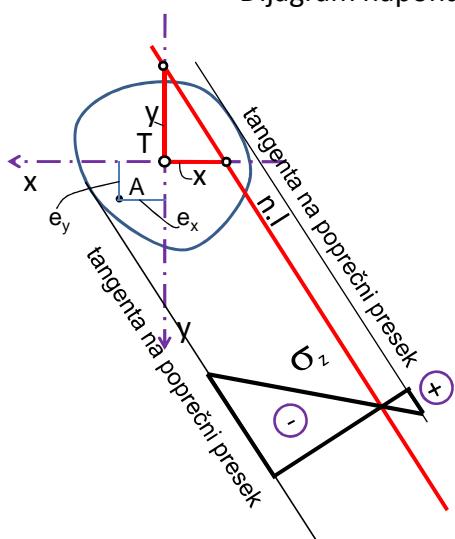
Presek te prave sa y osom dobija se kada se u jednačinu za neutralnu liniju stavi $x=0$

$$1 + \frac{e_y}{i_x^2} \cdot y = 0 \rightarrow y = -\frac{i_x^2}{e_y}$$

odsečak na y osi

25

Dijagram napona



Odredimo položaj neutralne linije

Dijagram napona crtamo upravno na neutralnu liniju

Pravila

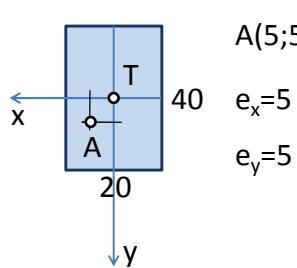
1. Neutralna linija je uvek sa druge strane težišta u odnosu na napadnu tačku sile
2. Napon pritiska je sa one strane neutralne linije na kojoj je sila pritiska

26

Primer 7.1

Napadna tačka sile pritiska ima koordinate A(5;5). Poprečni presek štapa je pravugaonik 20x40 cm. Sila je F=20 kN.

Odrediti maksimalne napone pritiska i zatezanja.

**Postupak**

1. Odredimo težište i aksijalne momente inercije
2. Odredimo centralne poluprečnike inercije
3. Odredimo neutralnu liniju
4. Odredimo napone i nacrtamo dijagram napona

1. Određivanje težište i aksijalnih momenata inercije

Težište je poznato, a aksijalni momenti inercije su

$$I_x = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 106666,67 \text{ cm}^4 \quad I_y = \frac{20^3 \cdot 40}{12} = 26666,67 \text{ cm}^4$$

27

2. Centralni poluprečnici inercije

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{106666,67}{20 \cdot 40} = 133,33 \text{ cm}^2 \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{26666,67}{20 \cdot 40} = 33,33 \text{ cm}^2$$

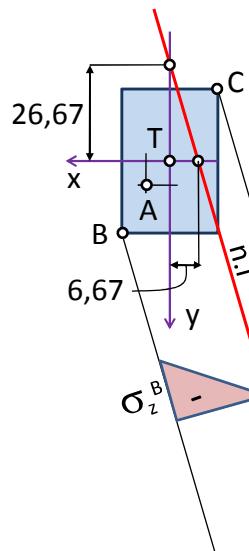
3. Određivanje neutralne linije

$$\left(1 + \frac{e_y}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_x}{i_y^2} \cdot x \right) = 0 \quad \text{jednačina neutralne linije}$$

$$x = -\frac{i_y^2}{e_x} = -\frac{33,33}{5} = -6,67 \text{ cm} \quad \text{odsečak na x osi}$$

$$y = -\frac{i_x^2}{e_y} = -\frac{133,33}{5} = -26,67 \text{ cm} \quad \text{odsečak na y osi}$$

28



4. Određivanje napona i crtanje dijagrama napona

Kroz krajnje tačke preseka povučemo tangente na poprečni presek paralelne sa neutralnom linijom

Ekstremne vrednosti napona su u tačkama B i C.

Potrebno je odrediti koordinate tačaka B i C u odnosu na težište

$$B(10;20) \quad C(-10;-20)$$

σ_z^B

σ_z^C

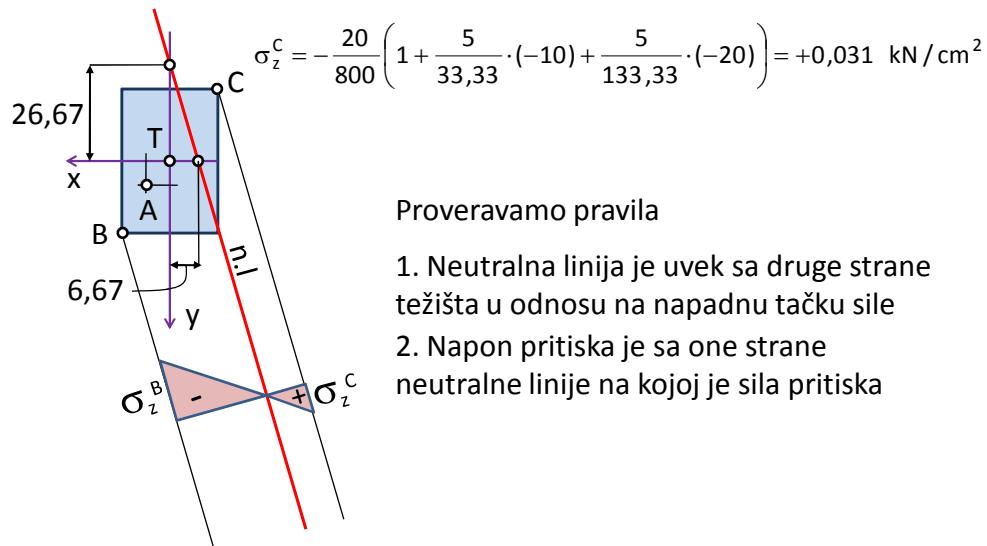
naponi

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_y}{i_x^2} \cdot y + \frac{e_x}{i_y^2} \cdot x \right) \text{ Izraz za napon}$$

zamenimo umesto x i y koordinate tačaka B i C i dobijemo napone u tim tačkama

$$\sigma_z^B = -\frac{20}{800} \left(1 + \frac{5}{33,33} \cdot 10 + \frac{5}{133,33} \cdot 20 \right) = -0,081 \text{ kN/cm}^2$$

29



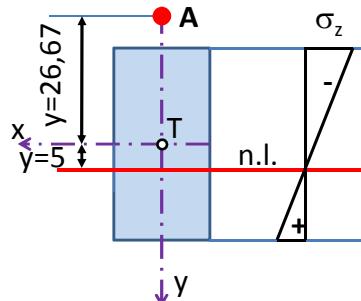
Proveravamo pravila

1. Neutralna linija je uvek sa druge strane težišta u odnosu na napadnu tačku sile
2. Napon pritiska je sa one strane neutralne linije na kojoj je sila pritiska

30

Primer 7.2

Ako je jednačina neutralne linije $y=5$, odrediti položaj napadne tačke sile. Poprečni presek je isto pravougaonik 20/40 cm



$y=5$ -prava paralelna x osi na rastojanju od 5

$$x = -\frac{i_y^2}{e_x} \quad \text{odsečak na x osi}$$

$$y = -\frac{i_x^2}{e_y} \quad \text{odsečak na y osi}$$

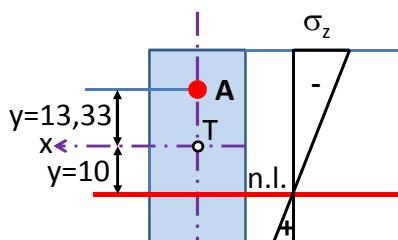
$$x = -\frac{i_y^2}{e_x} \rightarrow e_x = -\frac{i_y^2}{x} \quad \text{za } x=\infty \rightarrow e_x = 0$$

$$y = -\frac{i_x^2}{e_y} \rightarrow e_y = -\frac{i_x^2}{y} \quad \text{za } y=5 \rightarrow e_y = -\frac{133,33}{5} = -26,67 \text{ cm}$$

A(0;-26,67)

31

uzmimo sada jednačinu neutralne linije $y=10$

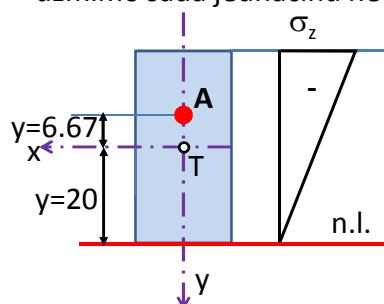


$y=10$ -prava paralelna x osi na rastojanju od 10

$$e_x = 0 \quad e_y = -\frac{133,33}{10} = -13,33 \text{ cm}$$

A(0;-13,33)

uzmimo sada jednačinu neutralne linije $y=20$ - na ivici preseka



$y=20$ -prava paralelna x osi na rastojanju od 20

$$e_x = 0 \quad e_y = -\frac{133,33}{20} = -6,67 \text{ cm}$$

A(0;-6,67)

javlja se samo napon pritiska u preseku

32

Zaključci

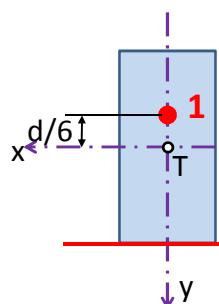
1. Ako je neutralna linija u beskonačnosti, napadna tačka sile je u težištu
2. Ako se neutralna linija udaljava od težišta, napadna tačka sile se približava težištu
3. Ako je neutralna linija paralelna x osi, napadna tačka sile je na y osi
4. Ako je neutralna linija na obodu preseka u preseku se javlja samo napon pritiska

33

Jezgro preseka

Neki materijali mogu dosta više da podnesu pritisak od zatezanje pa se postavlja pitanje u kojoj oblasti u preseku može da deluje sila a da u celom preseku bude napon pritiska.

Videli smo da kada neutralna linija tangira poprečni presek ceo presek je pritisnut. Postavimo neutralne linije po obimu pravougaonika bxd i odredimo napadne tačke sile.

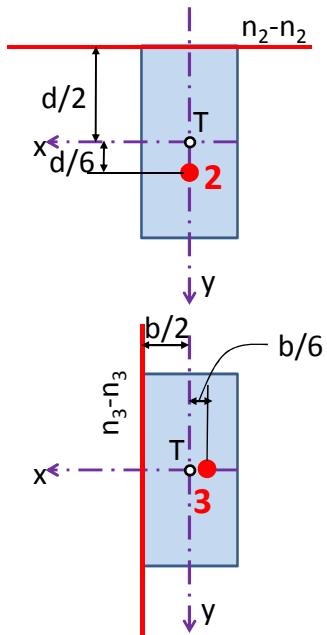


$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{b \cdot d^3}{12}}{b \cdot d} = \frac{d^2}{12} \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{b^3 \cdot d}{12}}{b \cdot d} = \frac{b^2}{12}$$

za $n_1-n_1 \quad y=d/2$

$$e_y = -\frac{i_x^2}{y} = -\frac{\frac{d^2}{12}}{\frac{d}{2}} = -\frac{d}{6} \quad e_x = 0 \quad \mathbf{1(0; -d/6)}$$

34

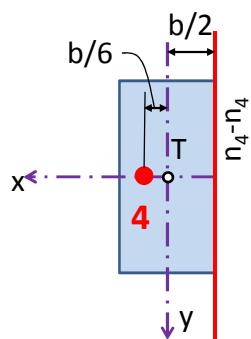
za n_2-n_2 $y=-d/2$

$$e_y = -\frac{i_x^2}{y} = -\frac{\frac{12}{d}}{-\frac{d}{2}} = \frac{d}{6} \quad e_x = 0 \quad 2(0; d/6)$$

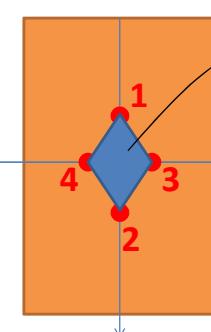
za n_3-n_3 $x=b/2$

$$e_x = -\frac{i_y^2}{x} = -\frac{\frac{12}{b}}{\frac{b}{2}} = -\frac{b}{6} \quad e_y = 0 \quad 3(-b/6; 0)$$

35

za n_4-n_4 $x=-b/2$

$$e_x = -\frac{i_y^2}{x} = -\frac{\frac{12}{b}}{-\frac{b}{2}} = \frac{b}{6} \quad e_y = 0 \quad 4(b/6; 0)$$



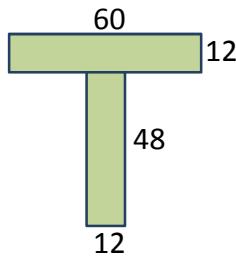
jezgro preseka

ako sila deluje unutar
jezgra preseka ceo
presek je pritisnut

36

Primer 7.3

Za zadati poprečni presek odrediti i nacrtati jezgro preseka

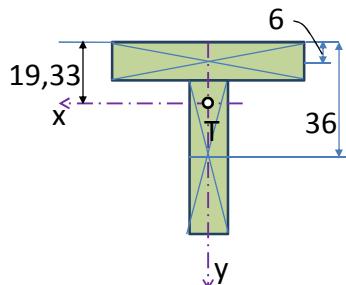


Na jezgro preseka ne utiču spoljne sile-to je čisto geometrijska karakteristika

Geometrijske karakteristike preseka

$$\text{Površina: } A = 60 \cdot 12 + 48 \cdot 12 = 1296 \text{ cm}^2$$

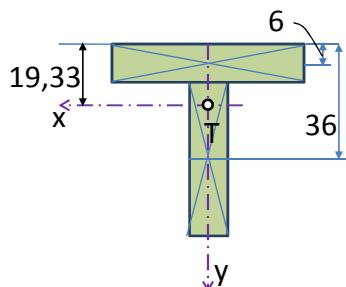
težište po y pravcu u odnosu na gornju ivicu



$$y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_{Ti}}{\sum A_i} = \frac{60 \cdot 12 \cdot 6 + 48 \cdot 12 \cdot 36}{1296}$$

$$y_T = 19,33 \text{ cm}$$

37

glavni centralni momenti inercije

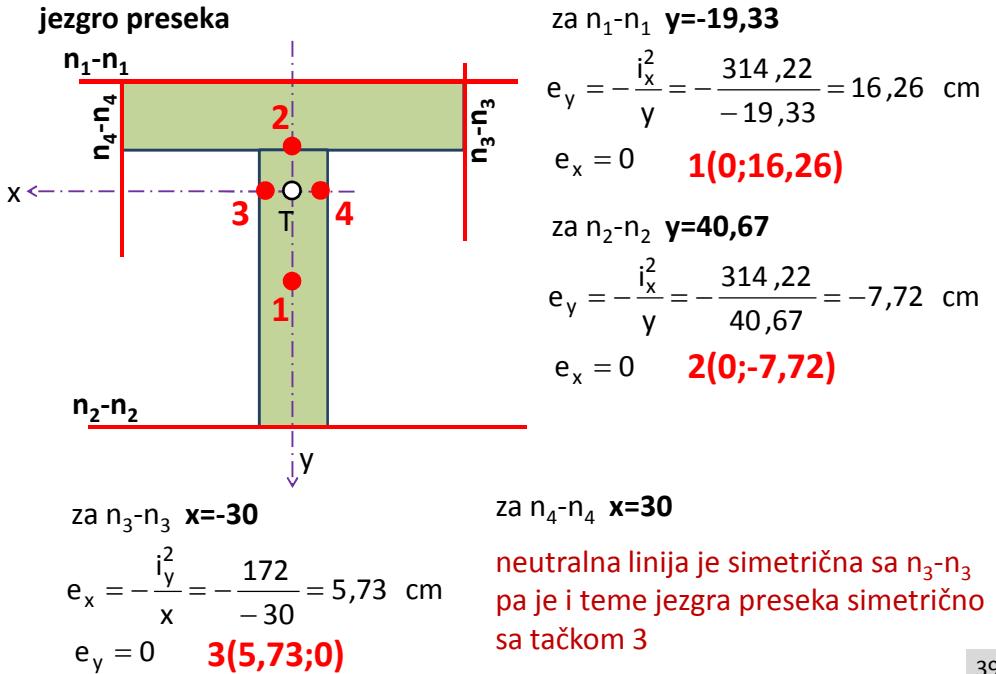
$$I_x = \frac{60 \cdot 12^3}{12} + 60 \cdot 12 \cdot (19,33 - 6)^2 + \\ + \frac{12 \cdot 48^3}{12} + 48 \cdot 12 \cdot (36 - 19,33)^2 \\ I_x = 407232 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{60^3 \cdot 12}{12} + \frac{12^3 \cdot 48}{12} = 222912 \text{ cm}^4$$

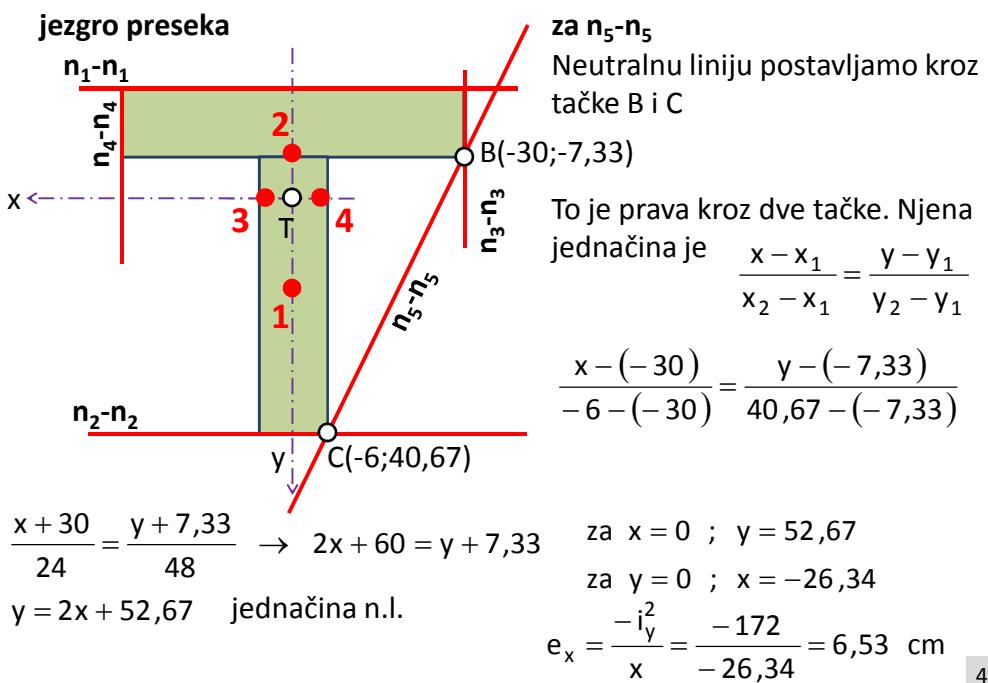
glavni poluprečnici inercije

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{407232}{1296} = 314,22 \text{ cm}^2 \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{222912}{1296} = 172 \text{ cm}^2$$

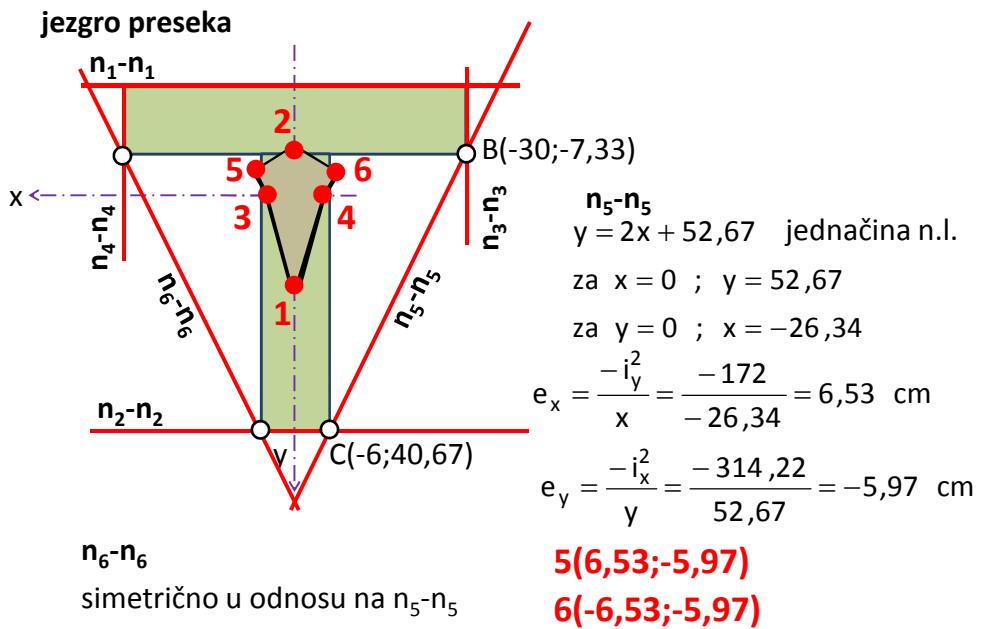
38



39



40



Spojimo tačke 1-6 i površina koja je ovičena predstavlja jezgro preseka

41