

Osnovne vrste naprezanja:

Aksijalno naprezanje

Smicanje

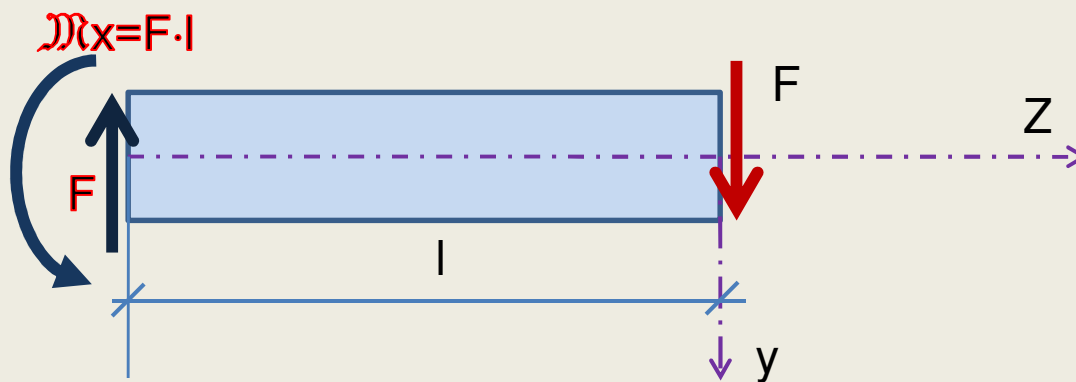
Uvijanje

Savijanje

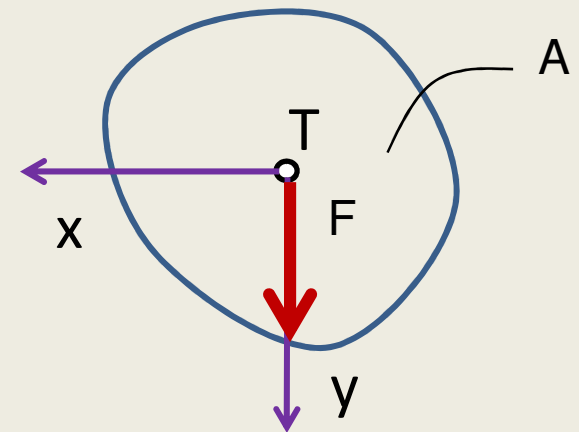
Izvijanje

SAVIJANJE GREDE SILAMA

Greda je opterećena na desnom kraju silom F paralelno jednoj od glavnih centralnih osa inercije (y osi).



poprečni presek štapa



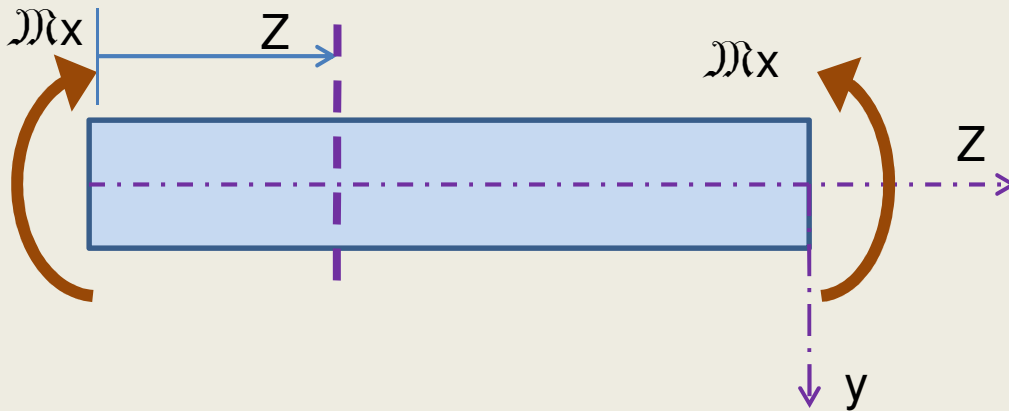
Da bi levi kraj bio u ravnoteži potrebno je da se na tom kraju jave:
Sila $-F$ da uravnoteži silu F

Momenat $M_x = F \cdot l$ da uravnoteži momenat usled sile F

Usled spoljašnje sile F u gredi se javljaju unutrašnje sile:
Transverzalna sila F i momenat M_x

Unutrašnje sile u poprečnom preseku

MOMENAT SAVIJANJA

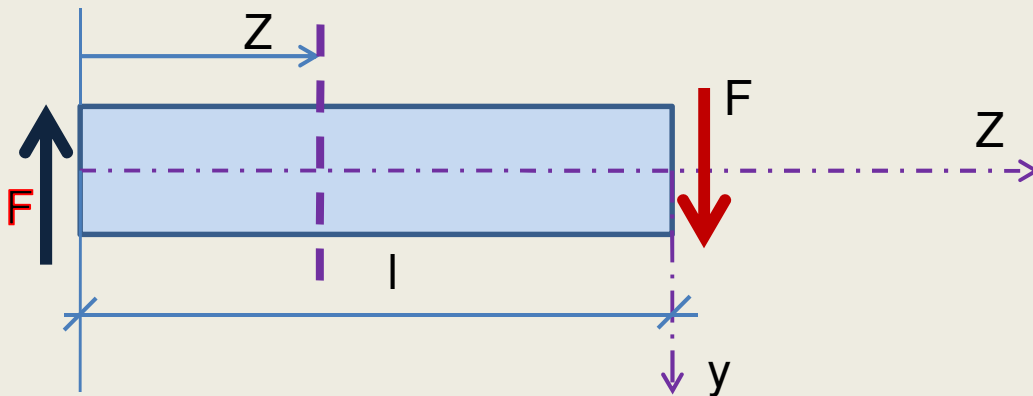


Momenat savijanja u nekom preseku jednaka je zbiru svih momenata savijanja levo **ili** desno od posmatranog preseka

Momenat savijanja je pozitivan kada zateže donju stranu

TRANSVERZALNA SILA

TRANSVERZALNA SILA - sila koja je upravna na osu štapa



Transverzalna sila u nekom preseku jednaka je zbiru svih transverzalnih sila levo **ili** desno od posmatranog preseka

Transverzalna sila je pozitivna kada suprotan kraj štapa obrće u smeru kazaljke časovnika (sa leva udesno)

NORMALNA (AKSIJALNA) SILE

sila zatezanja
zateže svoj kraj štapa



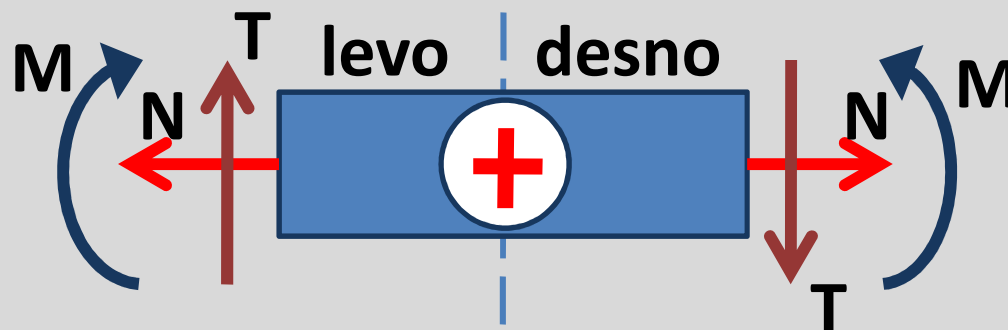
sila je pozitivna

sila pritiska
pritiska svoj kraj štapa



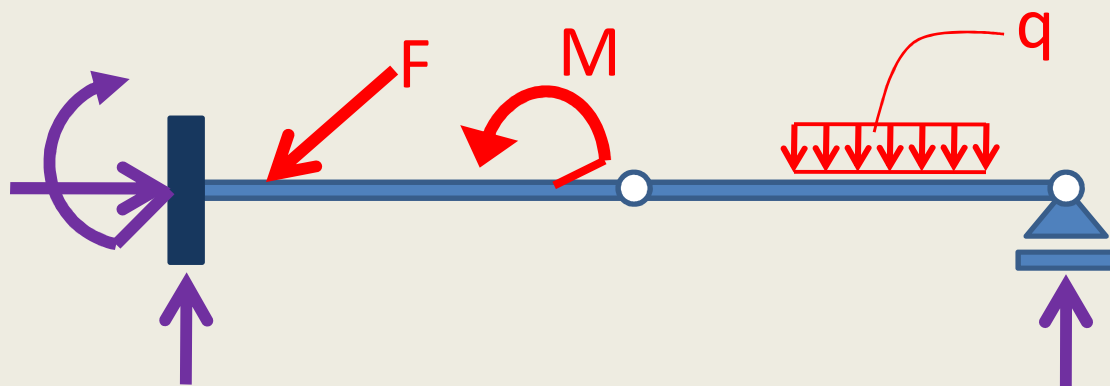
sila je negativna

POZITIVNI SMEROVI UNUTRAŠNJIH SILA



Rekapitulacija – gredni nosač

1. Gredni nosač se sastoji od štapova, koji su međusobno spojeni zglobno ili kruto i oslonaca.
2. Gredni nosač je opterećen sa spoljašnjim opterećenjem.
3. Usled spoljašnjeg opterećenja u osloncima se javljaju reakcije oslonaca



4. Usled svih spoljnjih sila nosača (spoljašnjeg opterećenja i reakcija oslonaca) u štapovima grednog nosača se javljaju unutrašnje sile

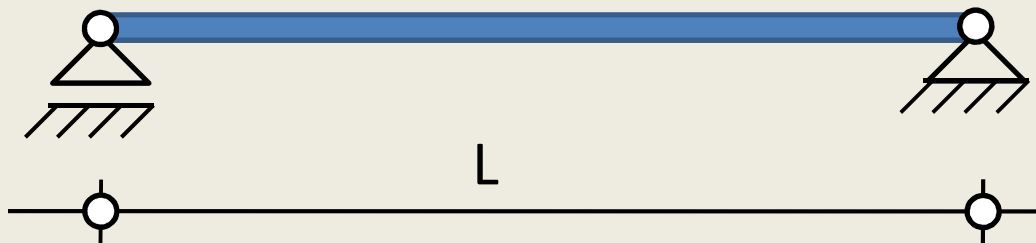
Unutrašnje sile su

1. Normalne sile
2. Transverzalne sile
3. Momenti savijanja

Unutrašnje sile se predstavljaju dijagramima unutrašnjih sila

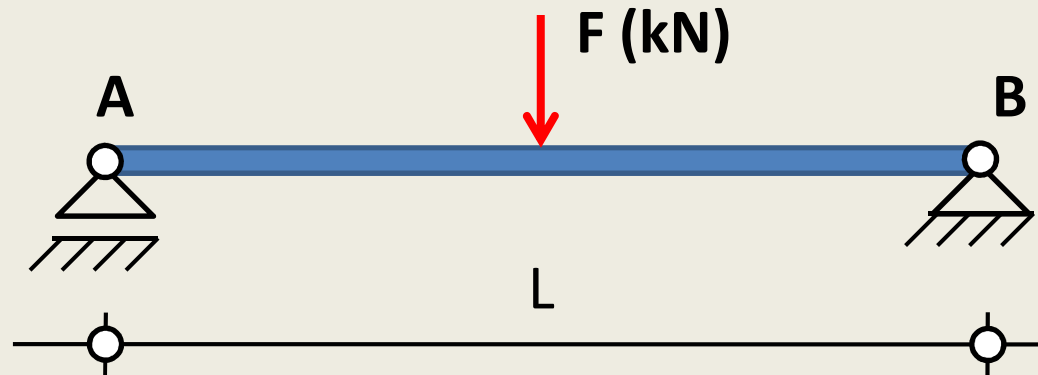
Prosta greda

To je nosač koji je na svojim krajevima vezan nepokretnim i pokretnim osloncem



Prosta greda opterećena silom u sredini

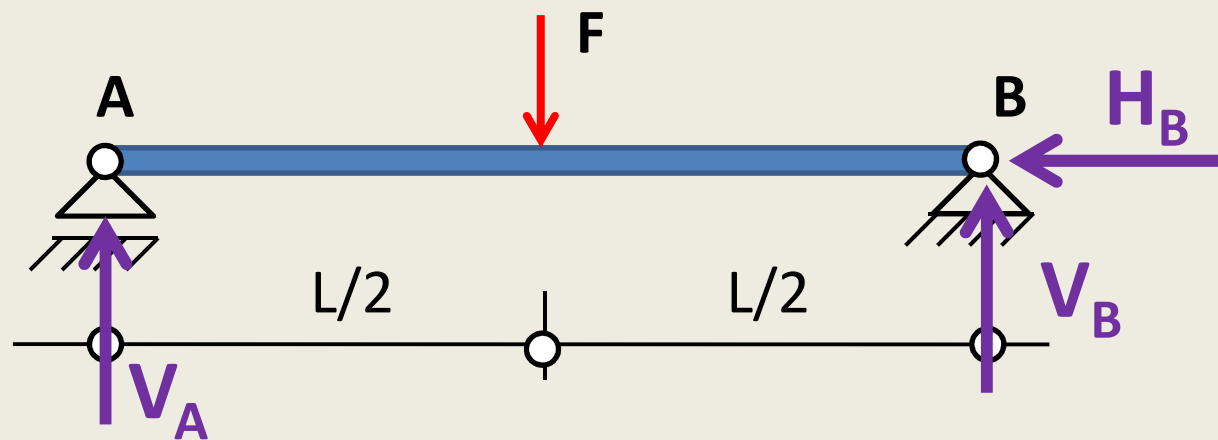
Nacrtati dijagrame presečnih sila



Postupak rešavanja

1. Odredimo reakcije oslonaca

- Zamenimo oslonce sa reakcijama oslonaca



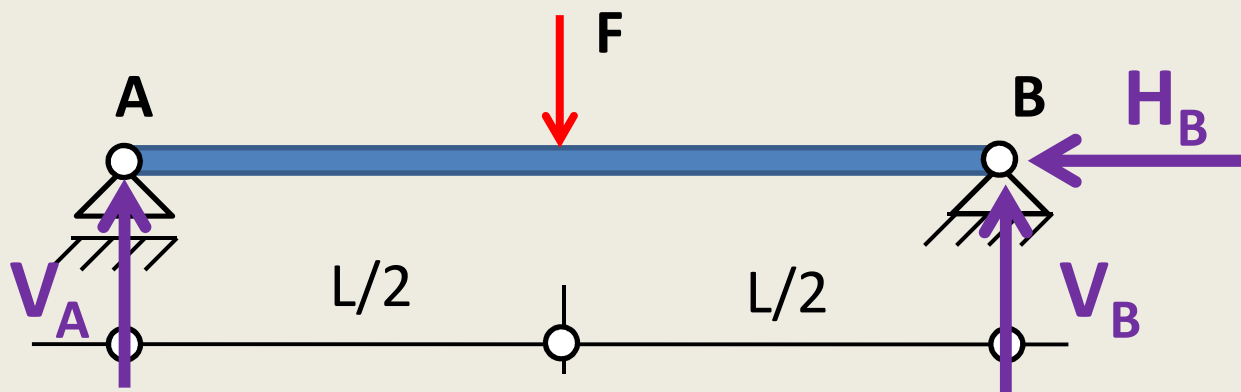
Postavimo uslove ravnoteže za sistem sila u ravni bez zajedničke napadne tačke

- 1) $\sum H_i = 0$ -Suma svih horizontalnih sila jednaka je nuli
- 2) $\sum V_i = 0$ -Suma svih vertikalnih sila jednaka je nuli
- 3) $\sum M_i = 0$ -Suma momenata u nekoj tački jednaka je nuli

$$1) \sum H_i = 0; \quad H_B = 0$$

$$2) \sum V_i = 0; \quad V_A - F + V_B = 0$$

$$3) \sum M_A = 0; \quad +F \cdot L / 2 - V_B \cdot L = 0$$



Iz treće jednačine dobijamo

$$3) \quad \Sigma M_A = 0; \quad +F \cdot L / 2 - V_B \cdot L = 0$$

$$V_B = \frac{F}{2}$$

Vratimo u drugu V_B

$$V_A - F + \frac{F}{2} = 0; \quad V_A = \frac{F}{2}$$

Iz prve jednačine se vidi da je $H_B=0$

Određeni zaključci

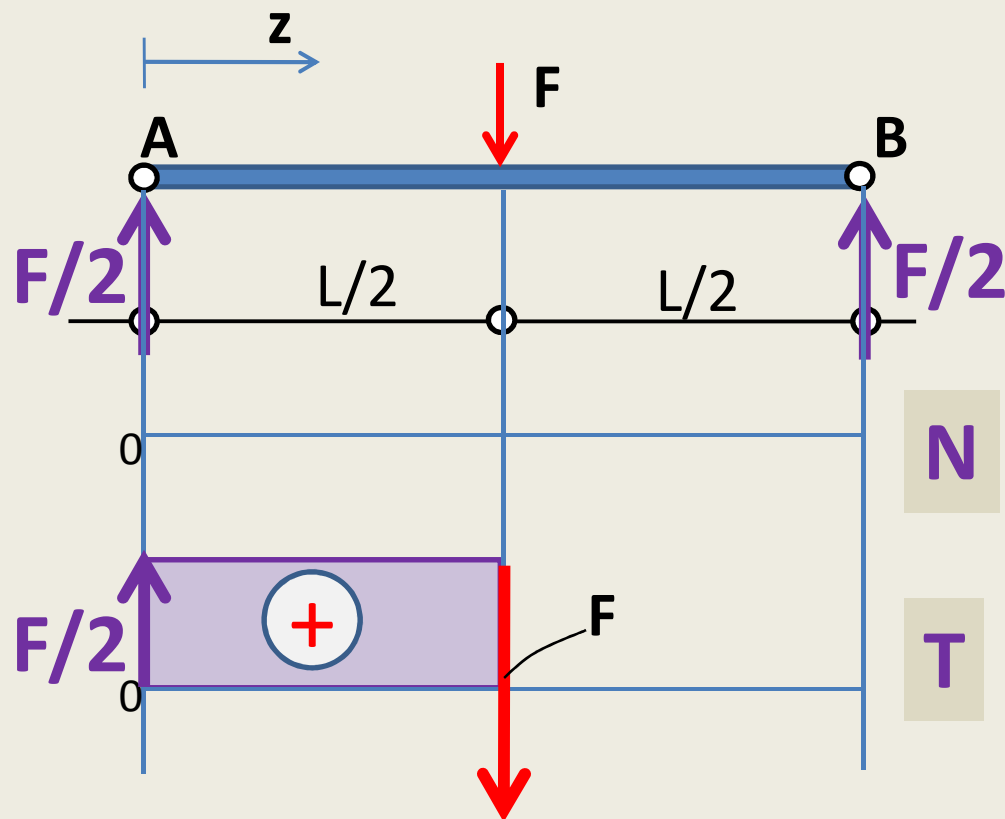
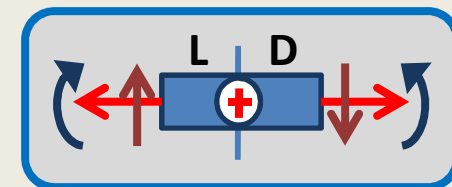
Ako nema horizontalnog opterećenja tada nema ni horizontalnih reakcija

Ako je nosač simetričan i opterećenje simetrično tada su i reakcije simetrične (iste)

Crtanje dijagrama

Dijagrami se crtaju upravno na osu nosača

Dijagram normalnih sila je nula –nema ih



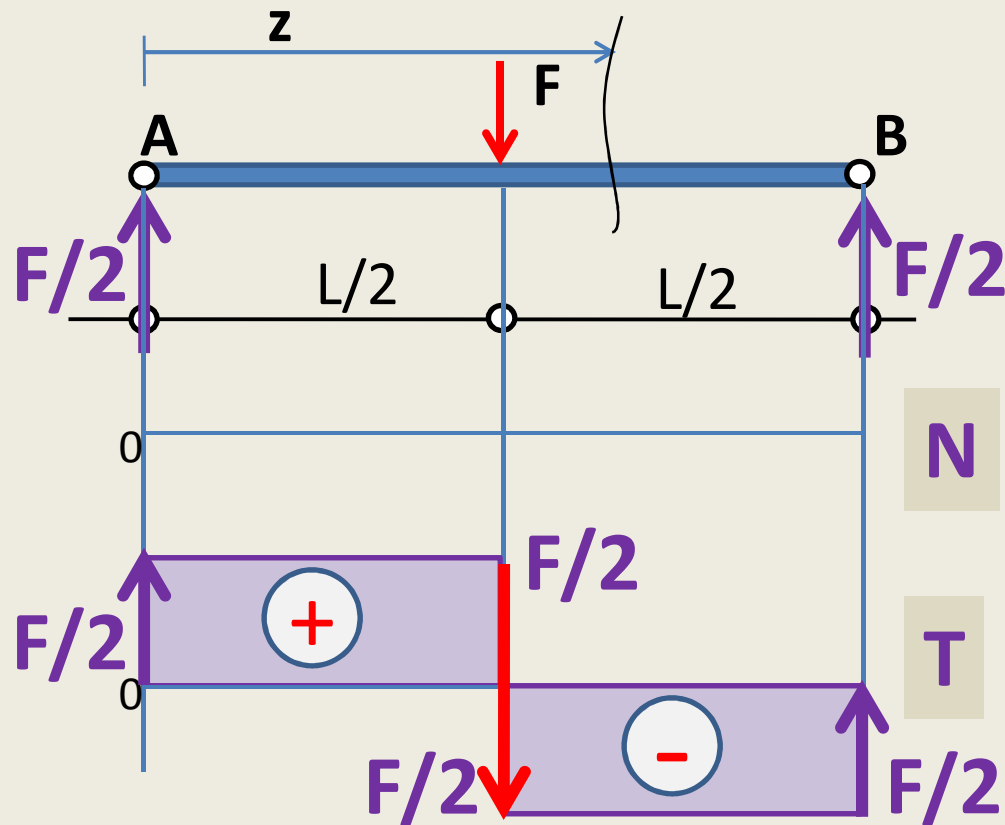
Dijagram transverzalnih sila

Krenemo sa leve strane i analiziramo sile redom

Prva sila je reakcija $F/2$. Ona je pozitivna (pogledati znak sile)

Nanosimo silu na dijagram na gore jer se pozitivne transverzalne sile crtaju sa gornje strane nulte linije.

Sve do sile F nema drugih transverzalnih sila tako da je $T_z = F/2$
Na mestu koncentrisane sile javlja se skok transverzalnih sila u negativnom pravcu za vrednost sile F



Vrednost transverzalne sile posle preseka gde deluje sila F je:

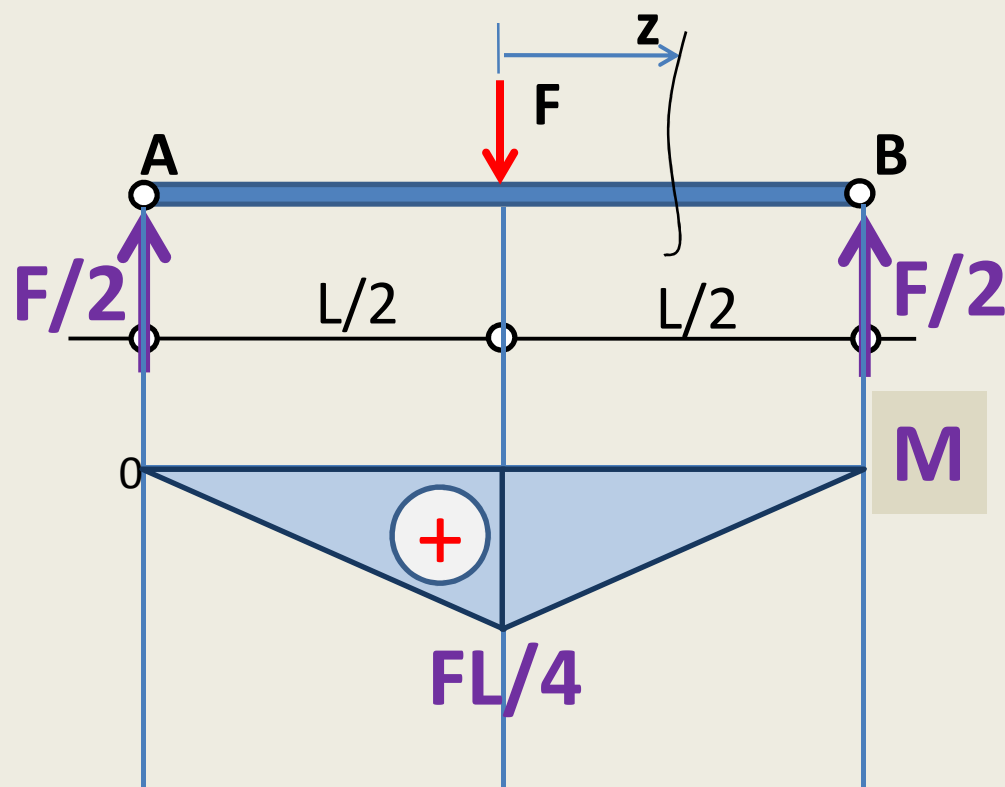
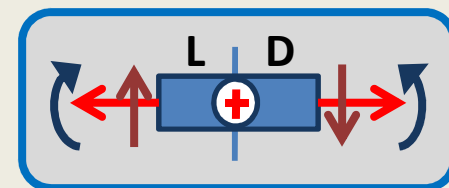
$$\Sigma F_z^{\text{levo}} = +F/2 - F = -F/2$$

Sve do sile V_B nema promene transverzalnih sila

Na kraju sila $V_B = F/2$ deluje u pozitivnom pravcu gledajući sa leve strane i zatvara dijagram (vraća ga u nulu). **Svaki dijagram mora biti zatvoren.**

Za crtanje dijagrama transverzalnih sila usvojimo pravilo:
Krenemo sa leve strane i nanosimo sile u pravcu njihovog delovanja.

Crtanje dijagrama momenata savijanja



Krenemo sa leve strane i analiziramo karakteristične preseke

Oslonac A je pokretni oslonac i u njemu nema momenta.

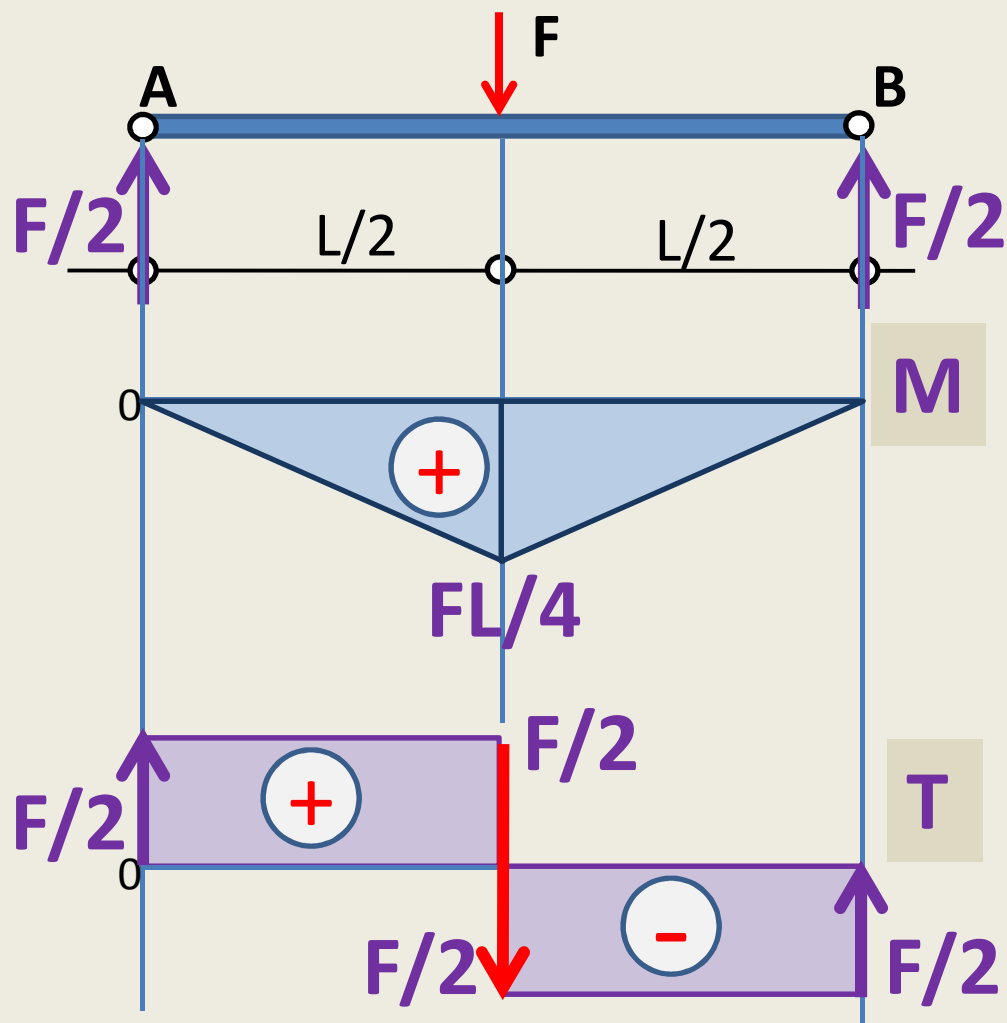
Na delu gde je $0 < z < L/2$ vrednost momenta je $M = F/2 \cdot z$. To je linearna funkcija (kriva prvog reda jer je promenljiva z prvog stepena). Za $z = L/2$ imamo $M = F/2 \cdot L/2 = FL/4$

Na delu gde je $L/2 < z < L$ vrednost momenta je:

$$M_{z_1} = \frac{F}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} + z_1 \right) - F \cdot z = \frac{F \cdot L}{4} + \frac{F \cdot z_1}{2} - F \cdot z_1 = \frac{F \cdot L}{4} - \frac{F \cdot z_1}{2}$$

za $z_1 = L/2$ imamo $M_{z_1} = \frac{F \cdot L}{4} - \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{2} = 0$ **dijagram se vraća u nulu**

Uporedimo sada dijagrame momenata i dijagram transverzalnih sila



Na delu gde je $0 < z < L/2$ vrednost momenta je:

$M = F/2 \cdot z$ (kriva prvog stepena)
a vrednost transverzalne sile je
 $T_z = F/2$ (kriva nultog stepena)

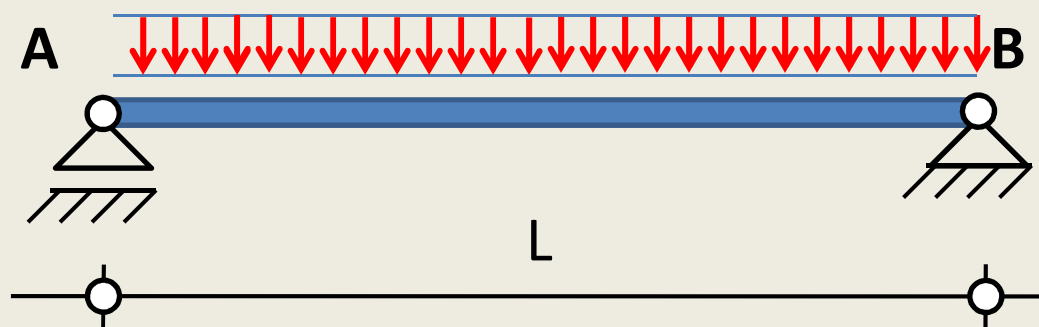
Vidimo da je:

Moment je funkcija za stepen viša od transverzalne sile.

To pravilo važi uvek

Prosta greda opterećena jednako podeljenim opterećenjem

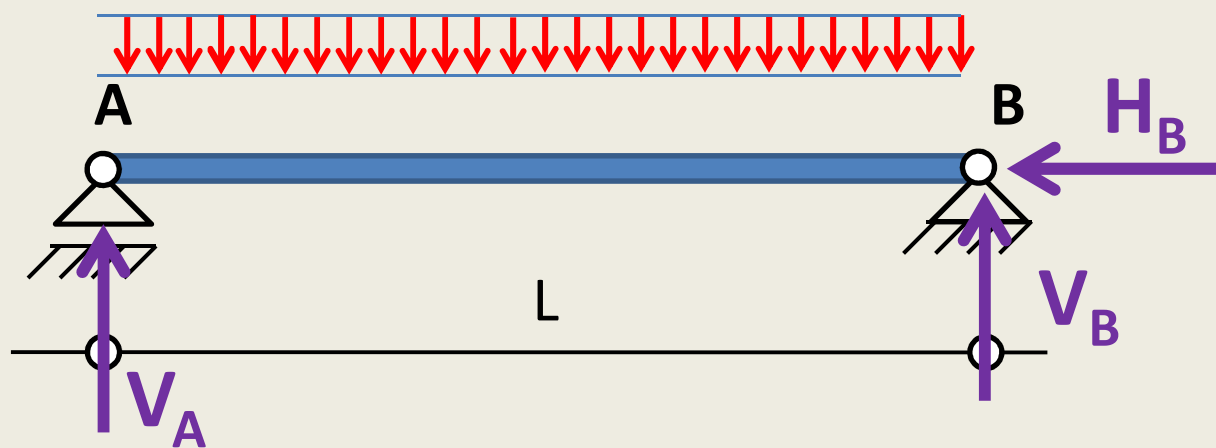
Nacrtati dijagrame presečnih sila
 q (kN/m)



Postupak rešavanja

1. Odredimo reakcije oslonaca

- Zamenimo oslonce sa reakcijama oslonaca



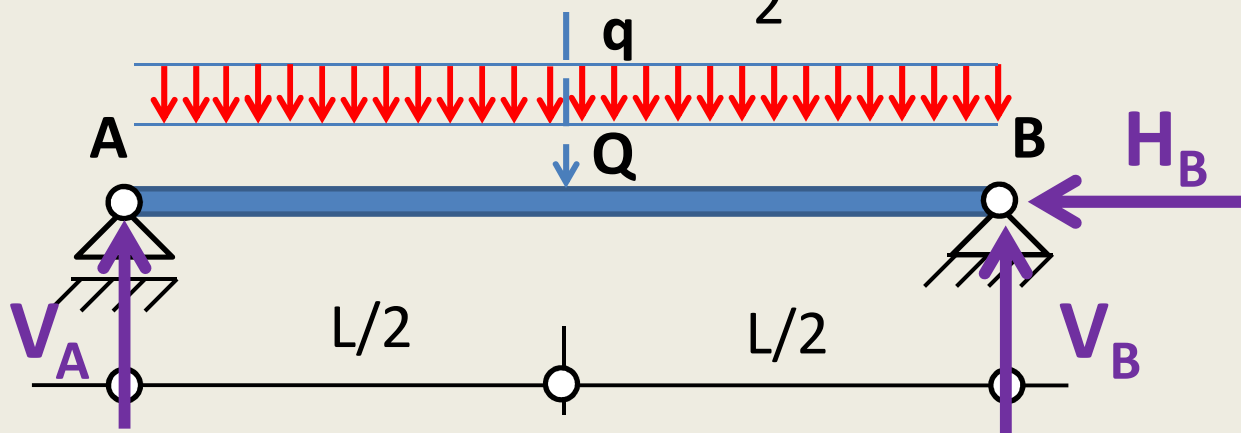
Postavimo uslove ravnoteže za sistem sila u ravni bez zajedničke napadne tačke

- 1) $\sum H_i = 0$ -Suma svih horizontalnih sila jednaka je nuli
- 2) $\sum V_i = 0$ -Suma svih vertikalnih sila jednaka je nuli
- 3) $\sum M_i = 0$ -Suma momenata u nekoj tački jednaka je nuli

$$1) \sum H_i = 0; \quad H_B = 0$$

$$2) \sum V_i = 0; \quad V_A - q \cdot L + V_B = 0$$

$$3) \sum M_A = 0; \quad +q \cdot L \cdot \frac{L}{2} - V_B \cdot L = 0$$



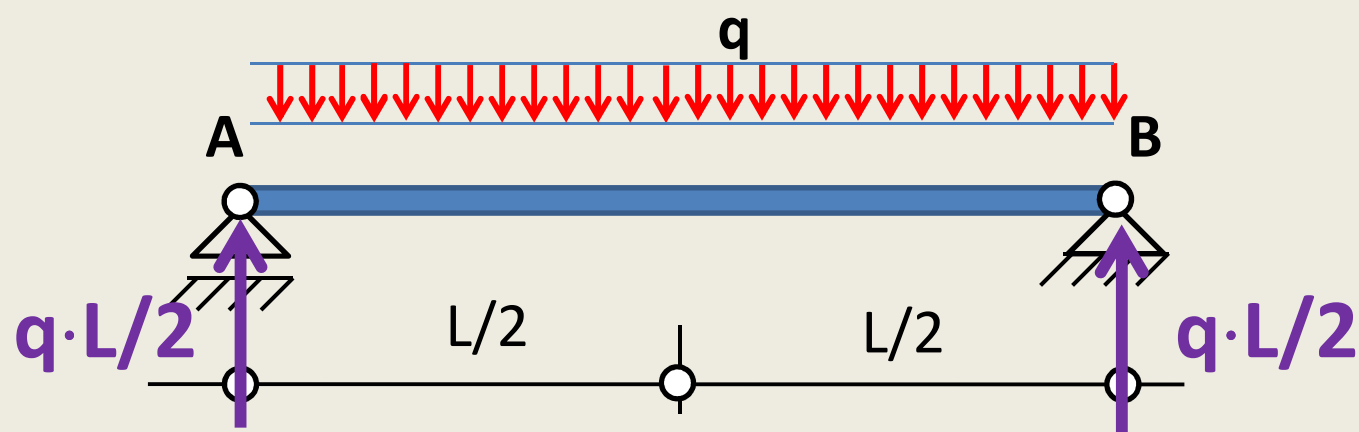
Iz treće jednačine dobijamo

$$3) \quad \Sigma M_A = 0; \quad +q \cdot L \cdot \frac{L}{2} - V_B \cdot L = 0 \quad ; \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{q \cdot L}{2}$$

zamenimo u drugu jednačinu

$$2) \quad \Sigma V_i = 0; \quad V_A - q \cdot L + \frac{q \cdot L}{2} = 0 \quad ; \quad \rightarrow \quad V_A = \frac{q \cdot L}{2}$$

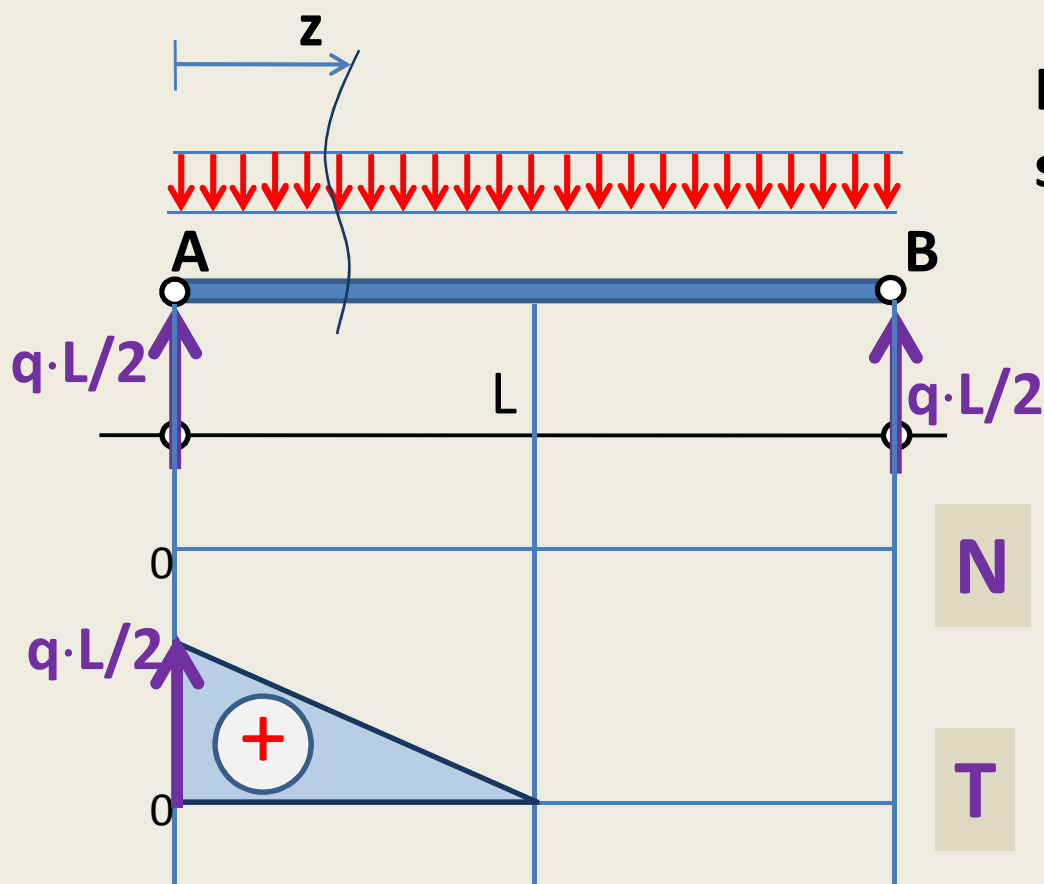
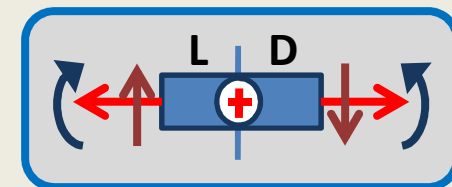
Iz prve jednačine se vidi da je $H_B=0$



Crtanje dijagrama

Dijagrami se crtaju upravno na osu nosača

Dijagram normalnih sila je nula –nema ih



Dijagram transverzalnih sila

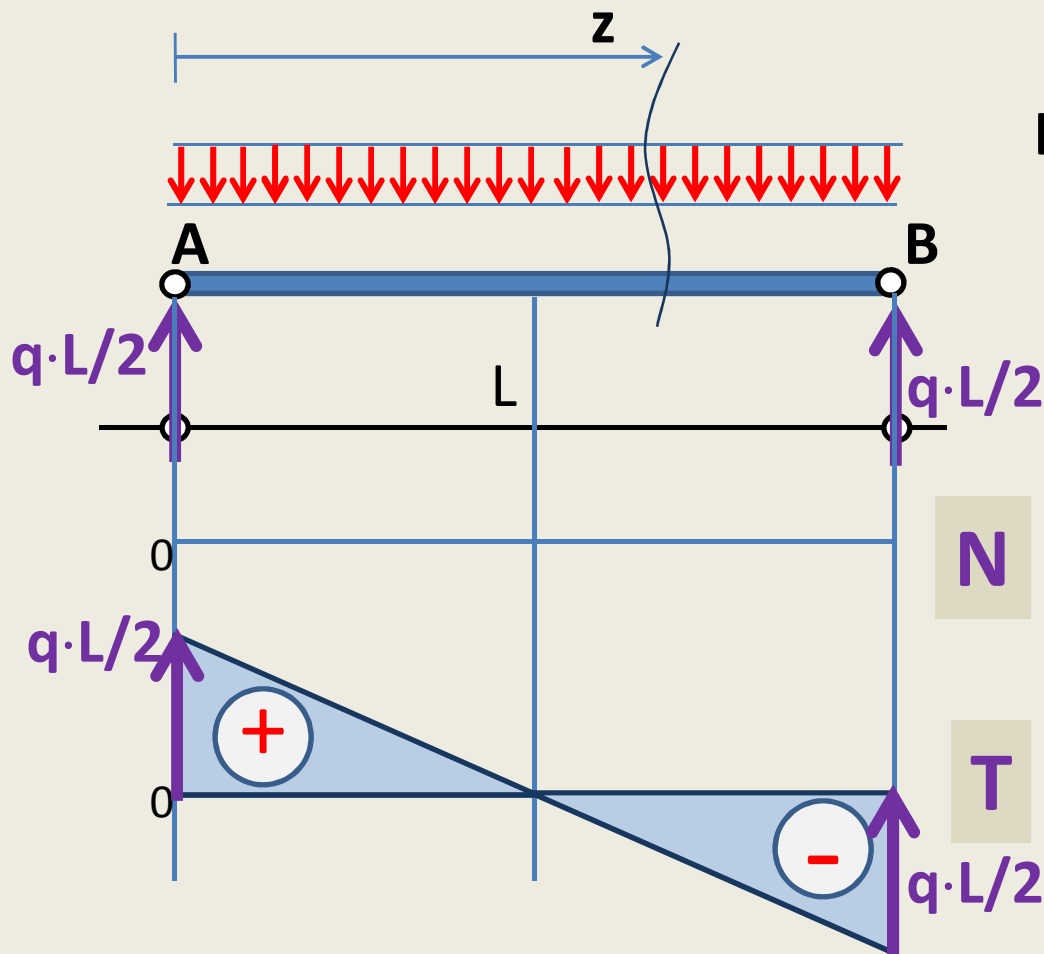
Krenemo sa leve strane i analiziramo sile redom

Prva sila je reakcija $qL/2$. Ona je pozitivna (pogledati znak sile)

Na delu gde je $0 < z < L/2$ vrednost transverzalne sile je $T = qL/2 - q \cdot z$. To je linearna funkcija (kriva prvog reda jer je promenljiva z prvog stepena).

Za $z = L/2$ imamo $T = qL/2 - qL/2 = 0$

Sila od oslonca A linearno opada jer je pravac kontinualnog opterećenja u negativnom smeru sa leve strane



Vrednost transverzalne sile posle polovine raspona je ista funkcija:

$$\Sigma F_z^{\text{levo}} = +q \cdot L/2 - q \cdot z$$

za $z=L$ imamo

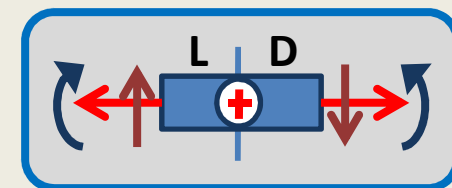
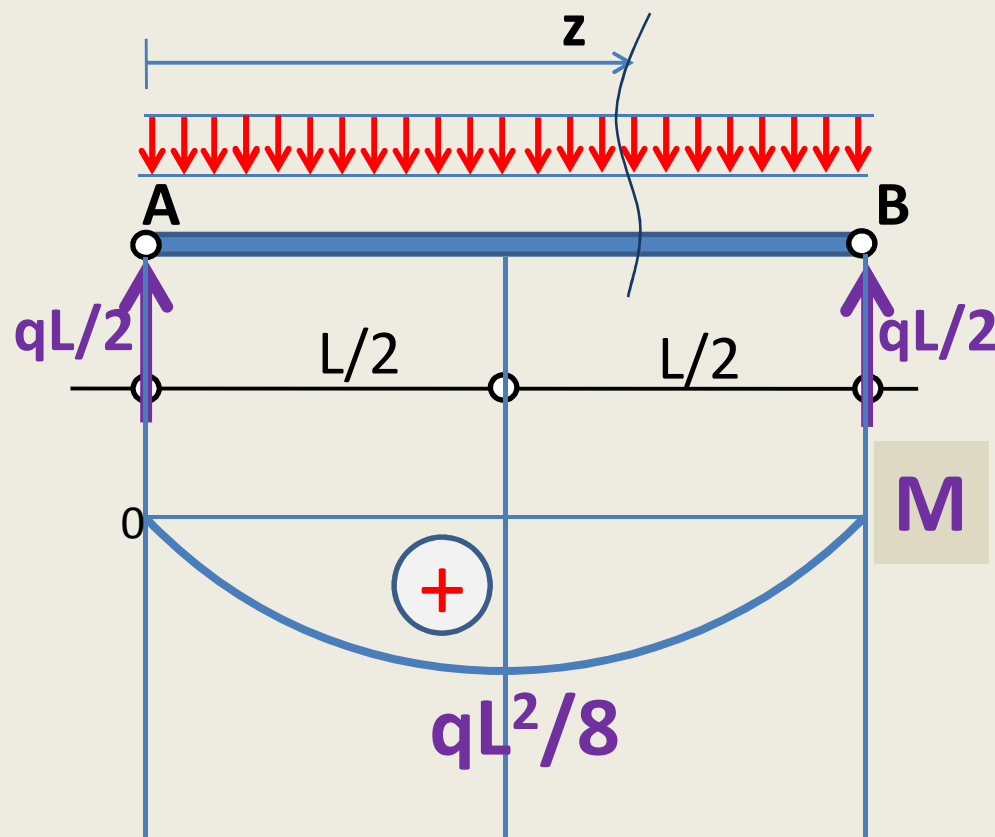
$$\Sigma F_z^{\text{levo}} = +q \cdot L/2 - q \cdot L = -q \cdot L/2$$

Na kraju sila $V_B = q \cdot L/2$ deluje u pozitivnom pravcu gledajući sa leve strane i zatvara dijagram (vraća ga u nulu). **Svaki dijagram mora biti zatvoren.**

Za crtanje dijagrama transverzalnih sila usvojimo pravilo:

Krenemo sa leve strane i nanosimo sile u pravcu njihovog delovanja.

Crtanje dijagrama momenata savijanja



Krenemo sa leve strane i analiziramo karakteristične preseke

Oslonac A je pokretni oslonac i u njemu nema momenta.

Na delu gde je $0 < z < L$ vrednost momenta je :

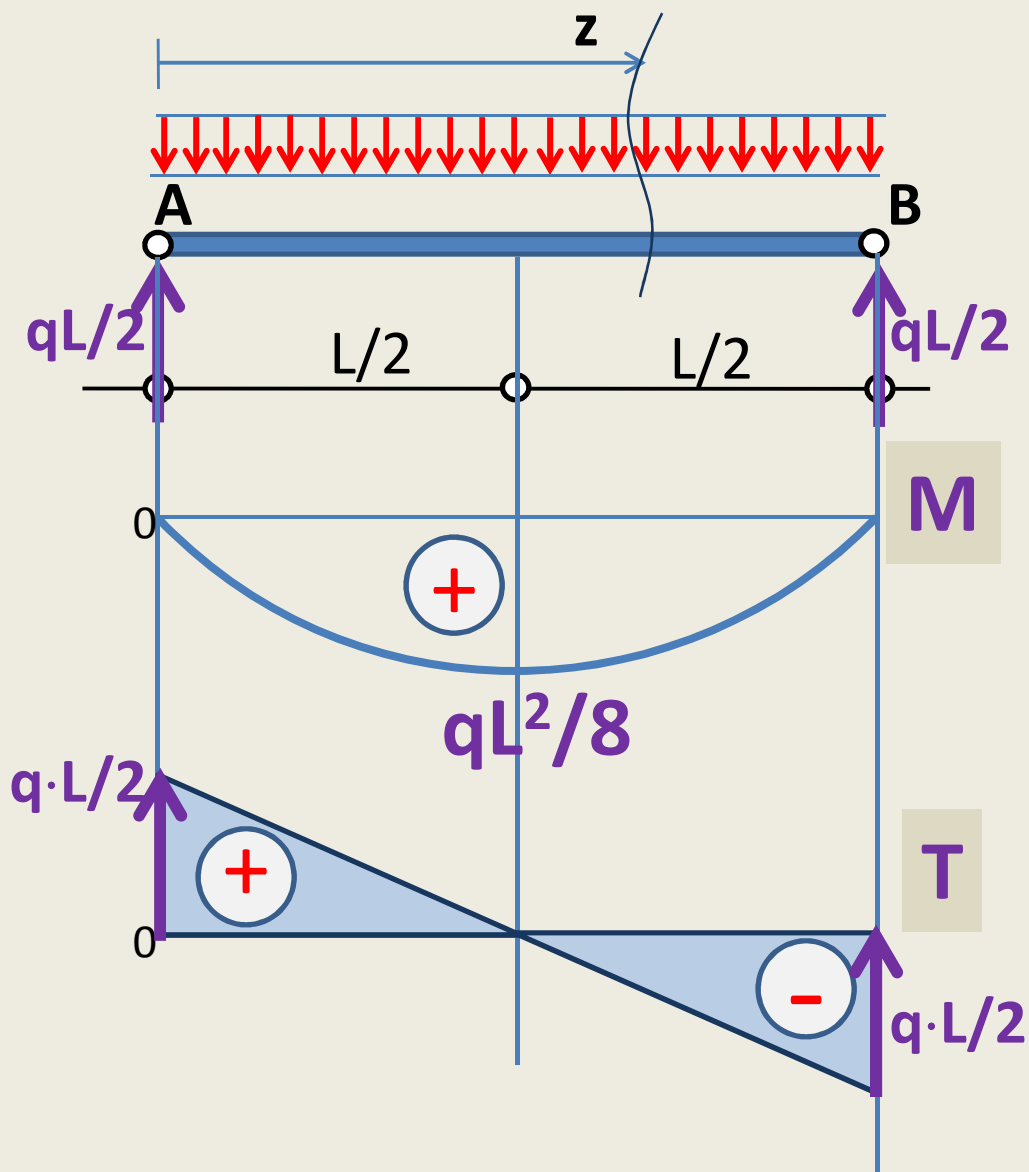
$$M_z = V_A \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = \frac{q \cdot L}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2}$$

To je kvadratna jednačina
(kriva drugog stepena- kvadratna parabola)

Za $z=L/2$ imamo:

$$M_{z=L/2} = \frac{q \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{q \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} = \frac{q \cdot L^2}{4} - \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

Uporedimo sada dijagrame momenata i dijagram transverzalnih sila



Na delu gde je $0 < z < L$ vrednost momenta je:

$$M_z = \frac{q \cdot L}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} \quad \text{Kriva drugog stepena}$$

Na delu gde je $0 < z < L$ vrednost transverzalne sile je:

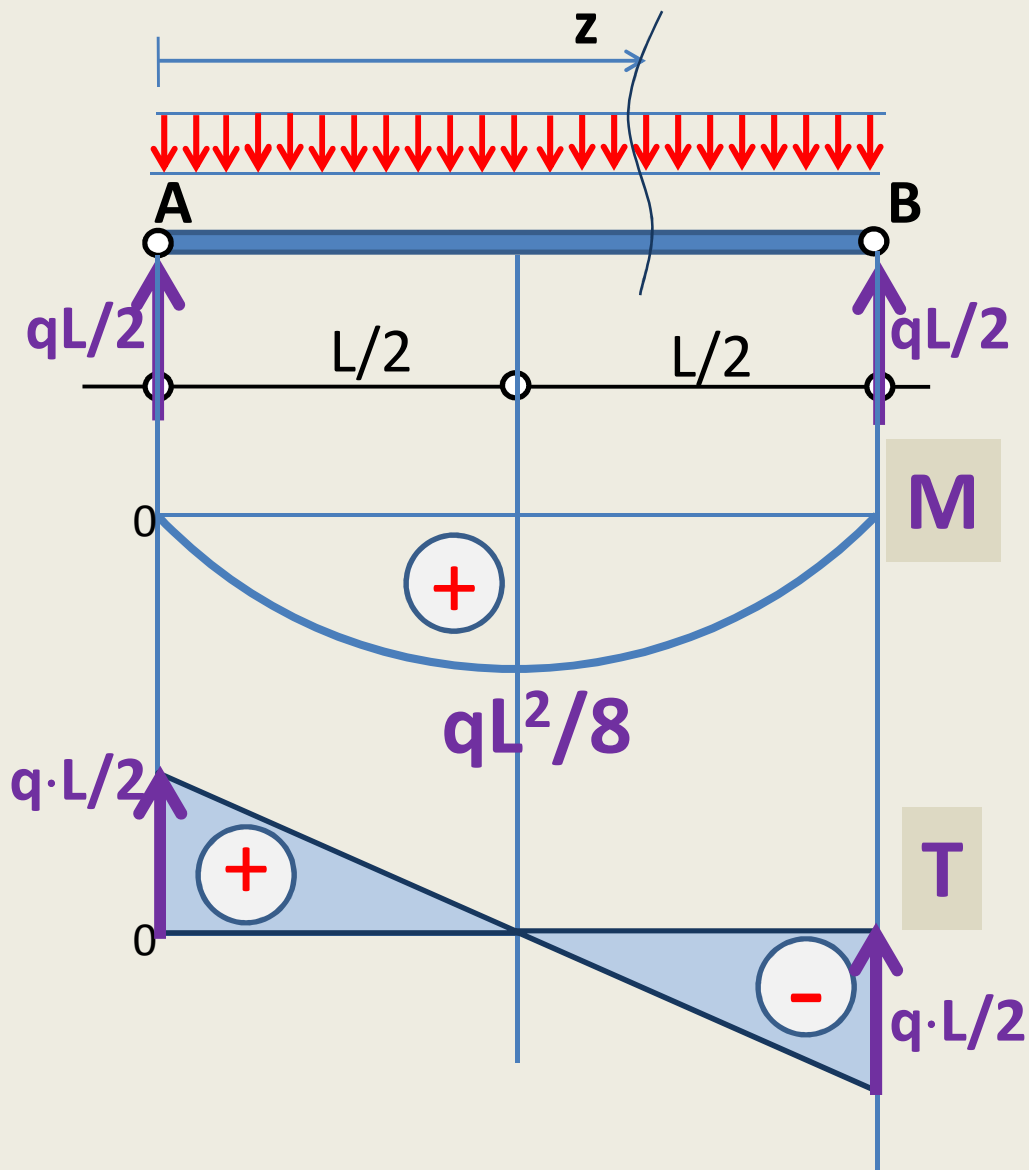
$$T_z = \frac{q \cdot L}{2} - q \cdot z \quad \text{Kriva prvog stepena}$$

Vidimo da je:

Moment je funkcija za stepen viša od transverzalne sile.

To pravilo važi uvek

Uvedimo sada još jedno pravilo koje važi za sve dijagrame



Za vrednost $z=L/2$ momenat ima maksimalnu vrednost

$$M_z = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

Odgovarajuća vrednost transverzalne sile je:

$$T_z = 0$$

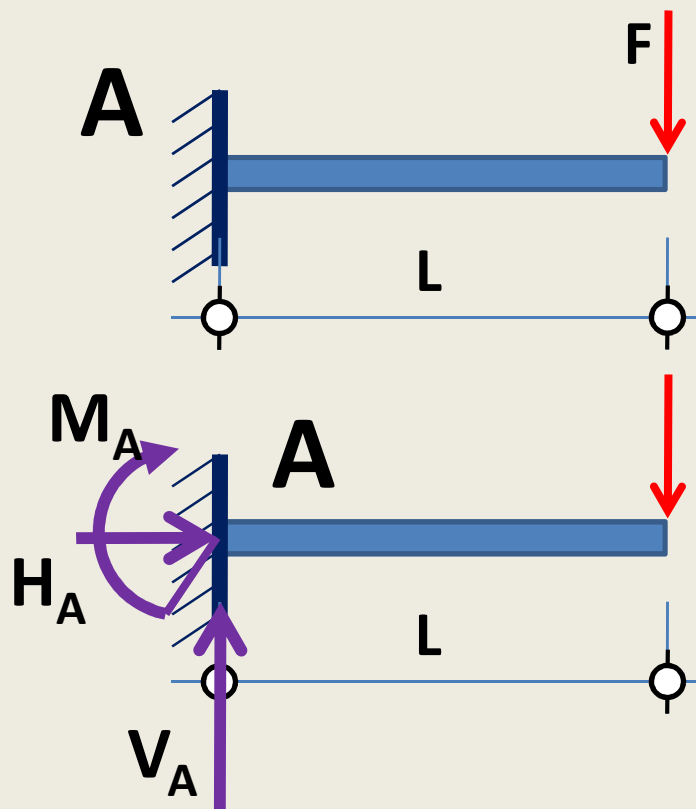
Vidimo da važi:

Gde transverzalna sila ima vrednost nula, momenat savijanja ima ekstremnu vrednost (min ili max).

To pravilo važi uvek

Konzola opterećena koncentrisanom silom

To je nosač koji je na svom jednom kraju uklješten a na drugom nema oslonac



Uslovi ravnoteže

$$1) \sum H_i = 0$$

$$2) \sum V_i = 0$$

$$3) \sum M_i = 0$$

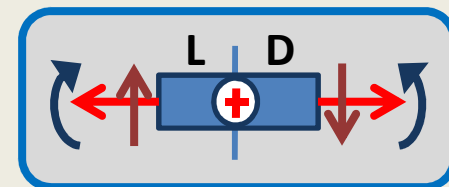
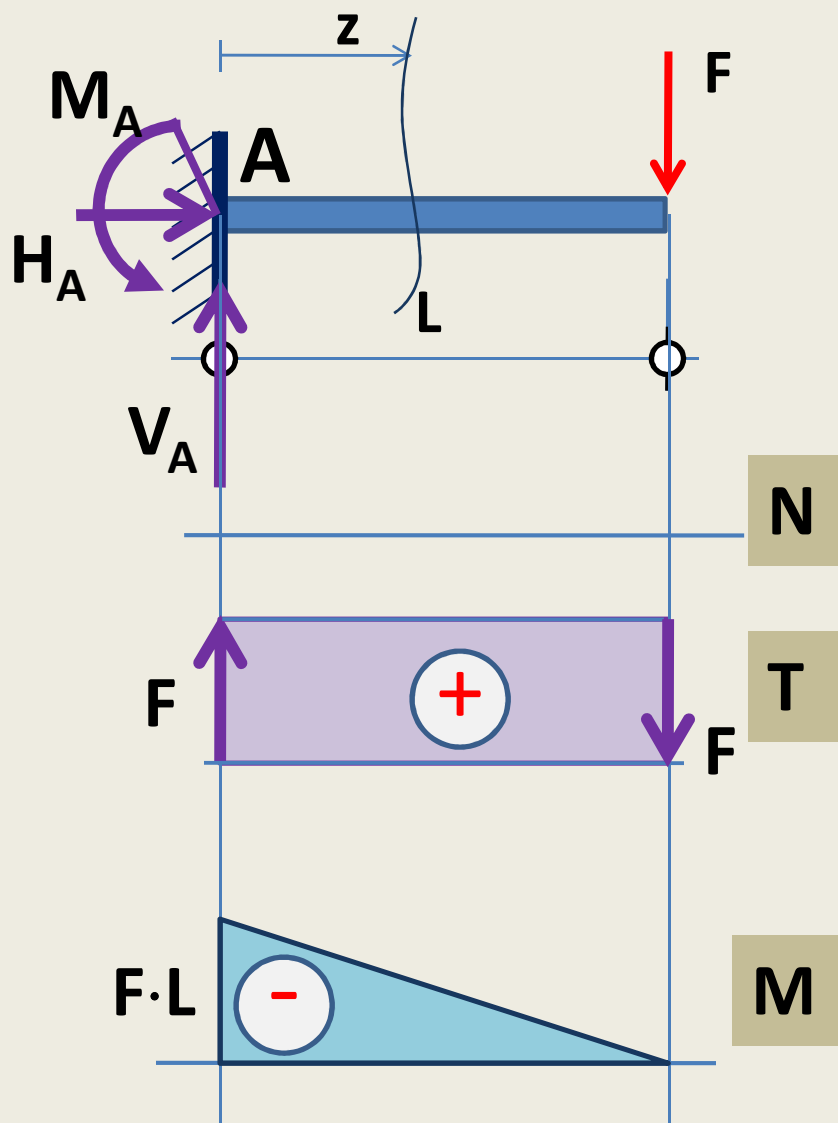
$$1) \sum H_i = 0; \quad H_A = 0$$

$$2) \sum V_i = 0; \quad V_A - F = 0; \quad \rightarrow V_A = F$$

$$3) \sum M_A = 0; \quad M_A + F \cdot L = 0; \quad \rightarrow M_A = -F \cdot L$$

Pretpostavljeni smer oslonačkog momenta je pogrešan. Potrebno je samo obrnuti smer

Crtanje dijagrama



Normalne sile - nema normalnih sila

Transverzalne sile

Oslonac A $T_z = V_A = F$

konstantno do sile F koja vraća u nulu

Momenti savijanja

Oslonac A $M_z = -F \cdot L$

Na $0 < z < L$ $M_z = -F \cdot L + F \cdot z$

dijagram momenat linearno opada (odnosno ide u pozitivnom smeru)

za $z = L$ $M_z = -F \cdot L + F \cdot L = 0$

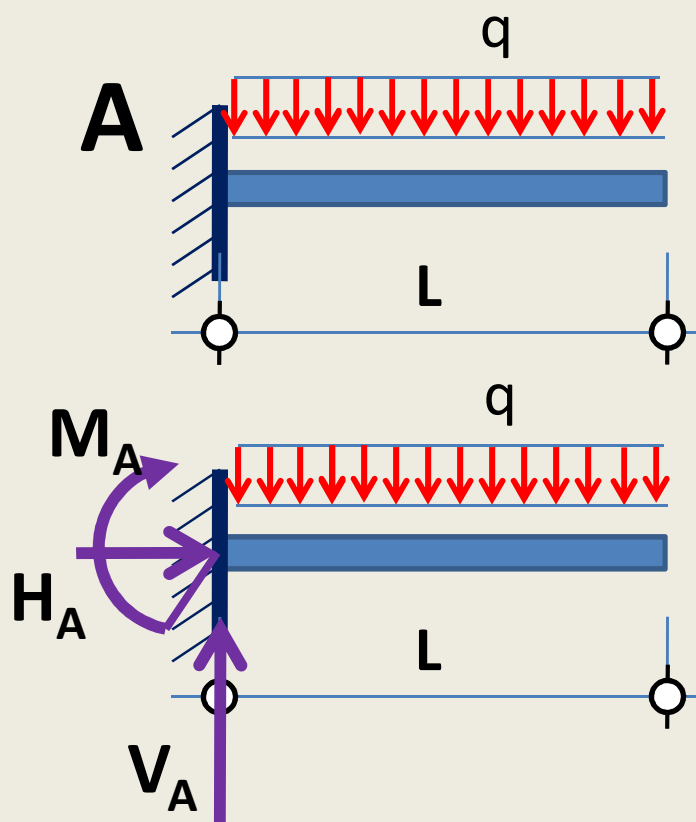
Konzola opterećena jednakopodeljenim opterećenjem

Uslovi ravnoteže

$$1) \sum H_i = 0$$

$$2) \sum V_i = 0$$

$$3) \sum M_i = 0$$



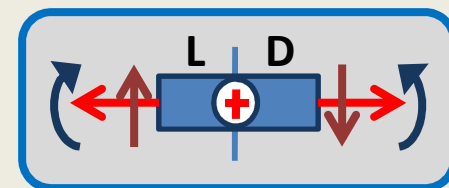
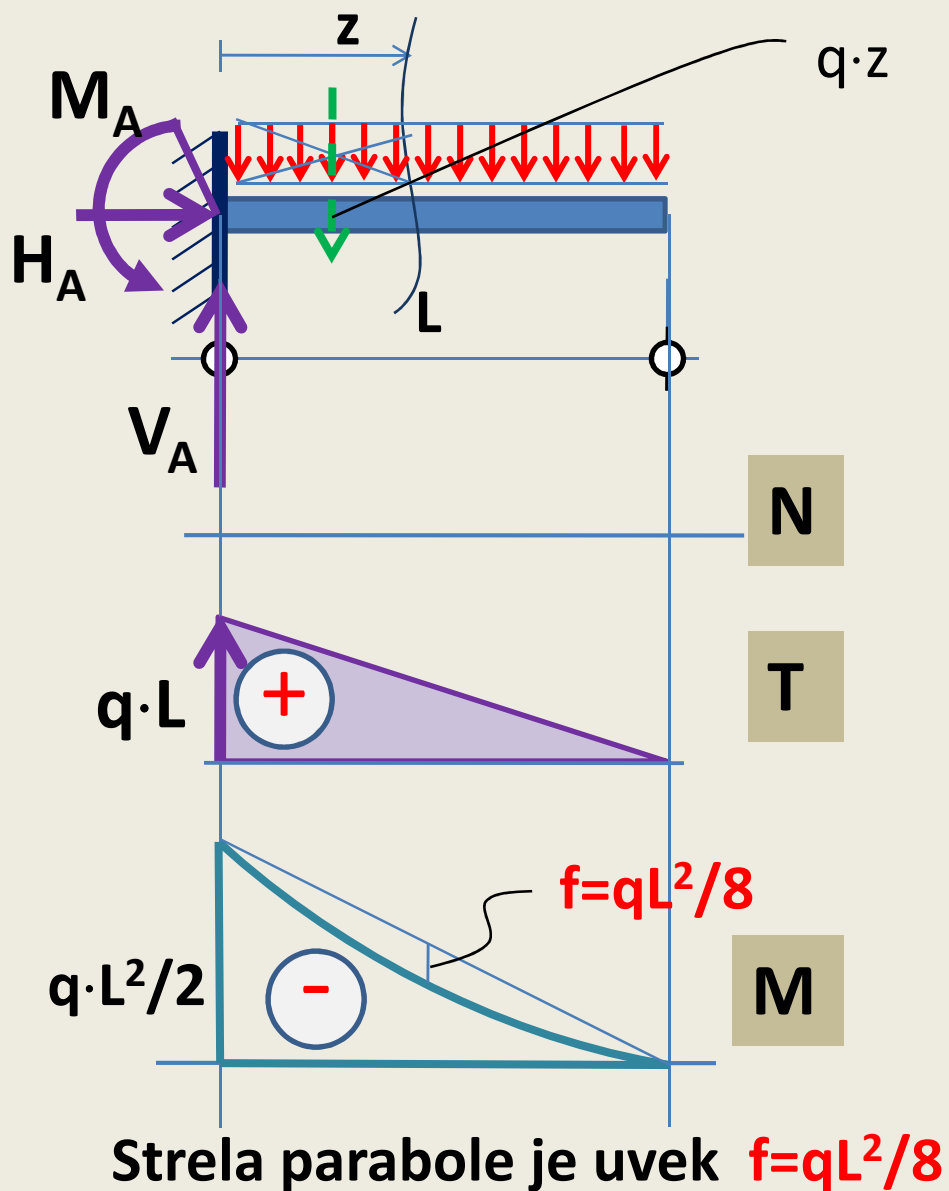
$$1) \sum H_i = 0; \quad H_A = 0$$

$$2) \sum V_i = 0; \quad V_A - q \cdot L = 0; \quad \rightarrow V_A = q \cdot L$$

$$3) \sum M_A = 0; \quad M_A + q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0; \quad \rightarrow M_A = -\frac{q \cdot L^2}{2}$$

Pretpostavljeni smer oslonačkog momenta je pogrešan. Potrebno je samo obrnuti smer

Crtanje dijagrama



Normalne sile - nema normalnih sila

Transverzalne sile

Oslonac A $T_z = V_A = q \cdot L$

na delu $0 < z < L$ $T_z = q \cdot L - q \cdot z$

za $z = L$ $T = 0$

Momenti savijanja

Oslonac A $M_z = -q \cdot L^2/2$

Na $0 < z < L$ $M_z = -q \cdot L^2/2 + q \cdot z \cdot z/2$

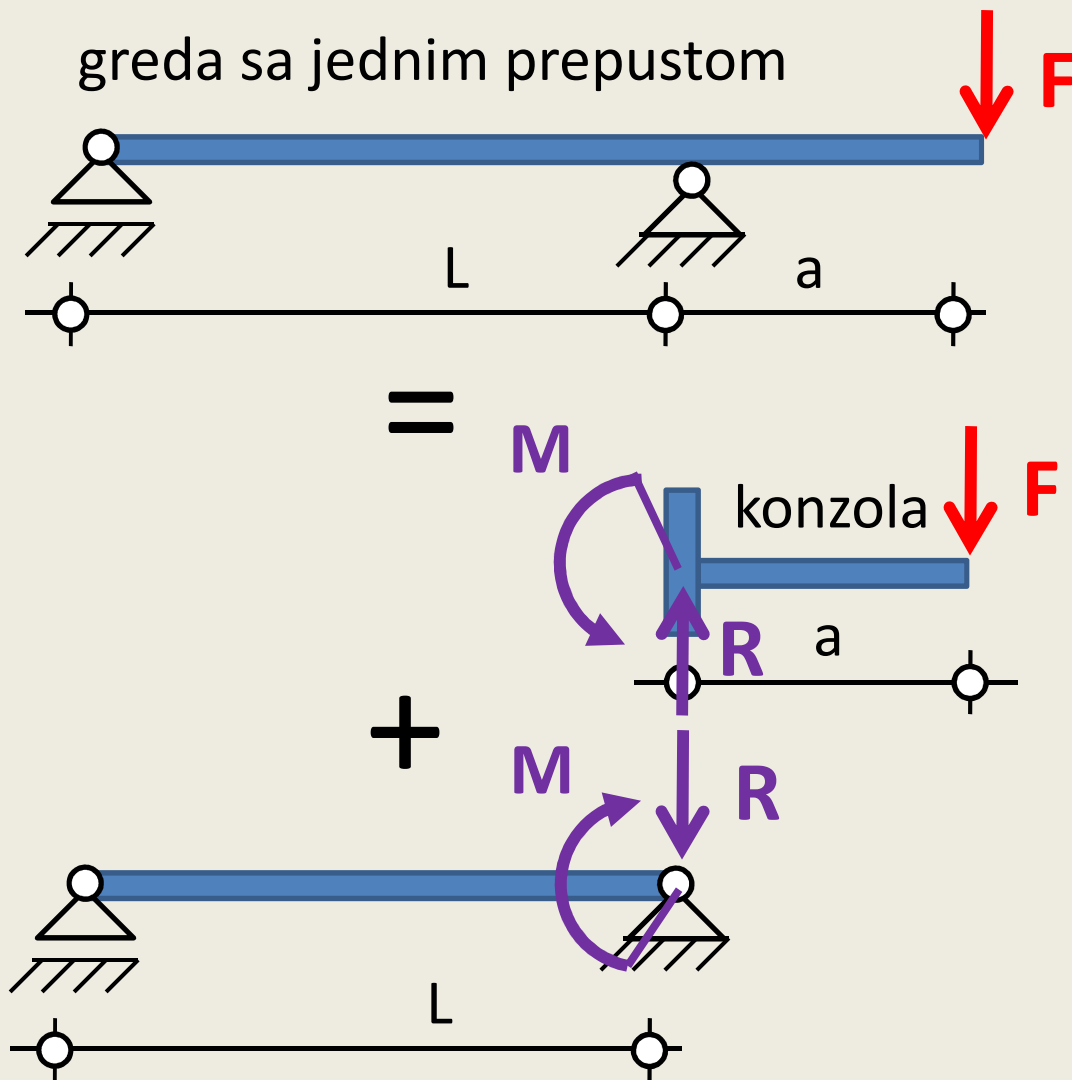
dijagram momenat opada (odnosno ide u pozitivnom smeru) po zakonu kvadratne parabole

Za $z = 0$ $M_z = -q \cdot L^2/2 + q \cdot L \cdot L/2 = 0$

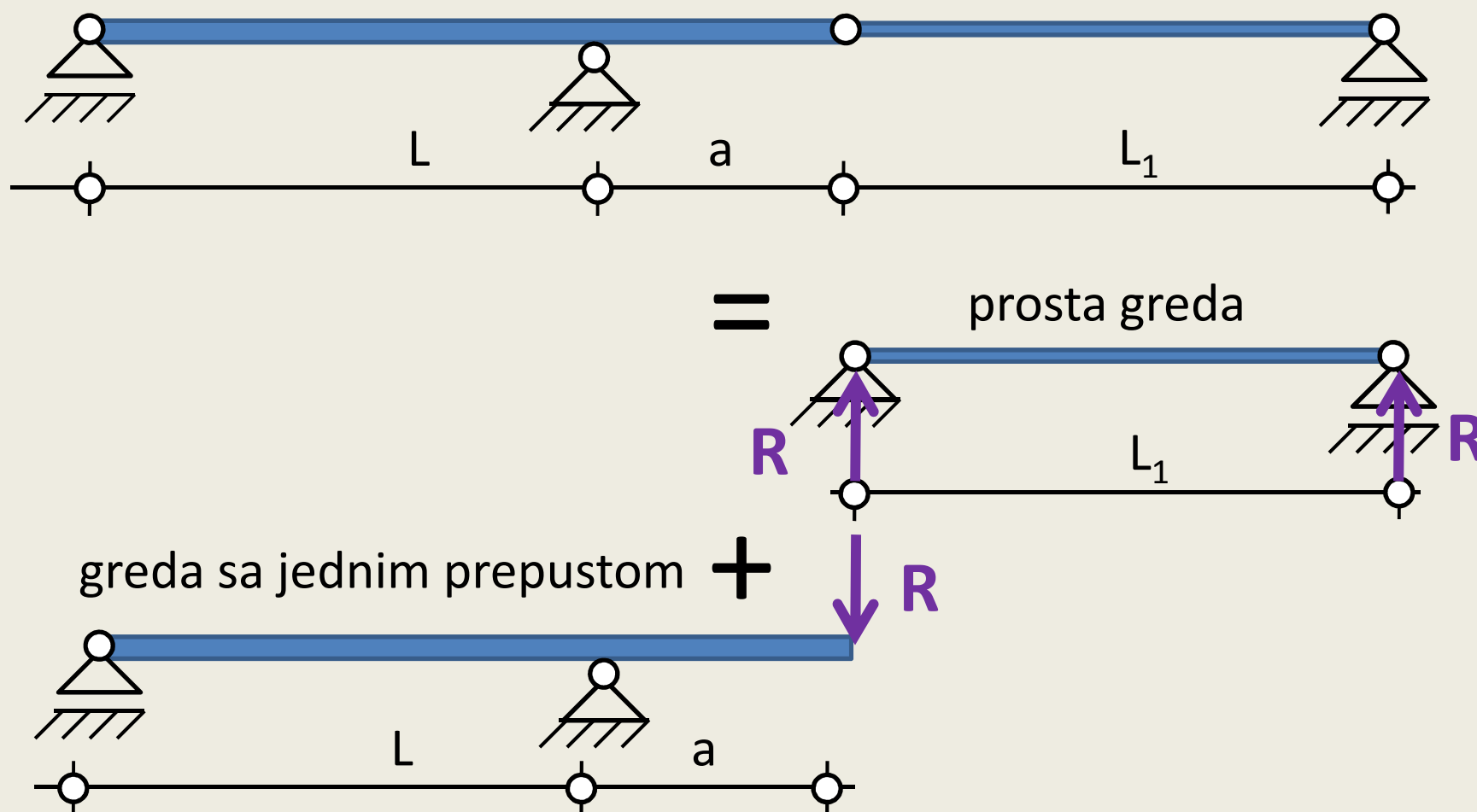
Složeni nosači

Greda sa prepustom je spoj proste grede i konzole

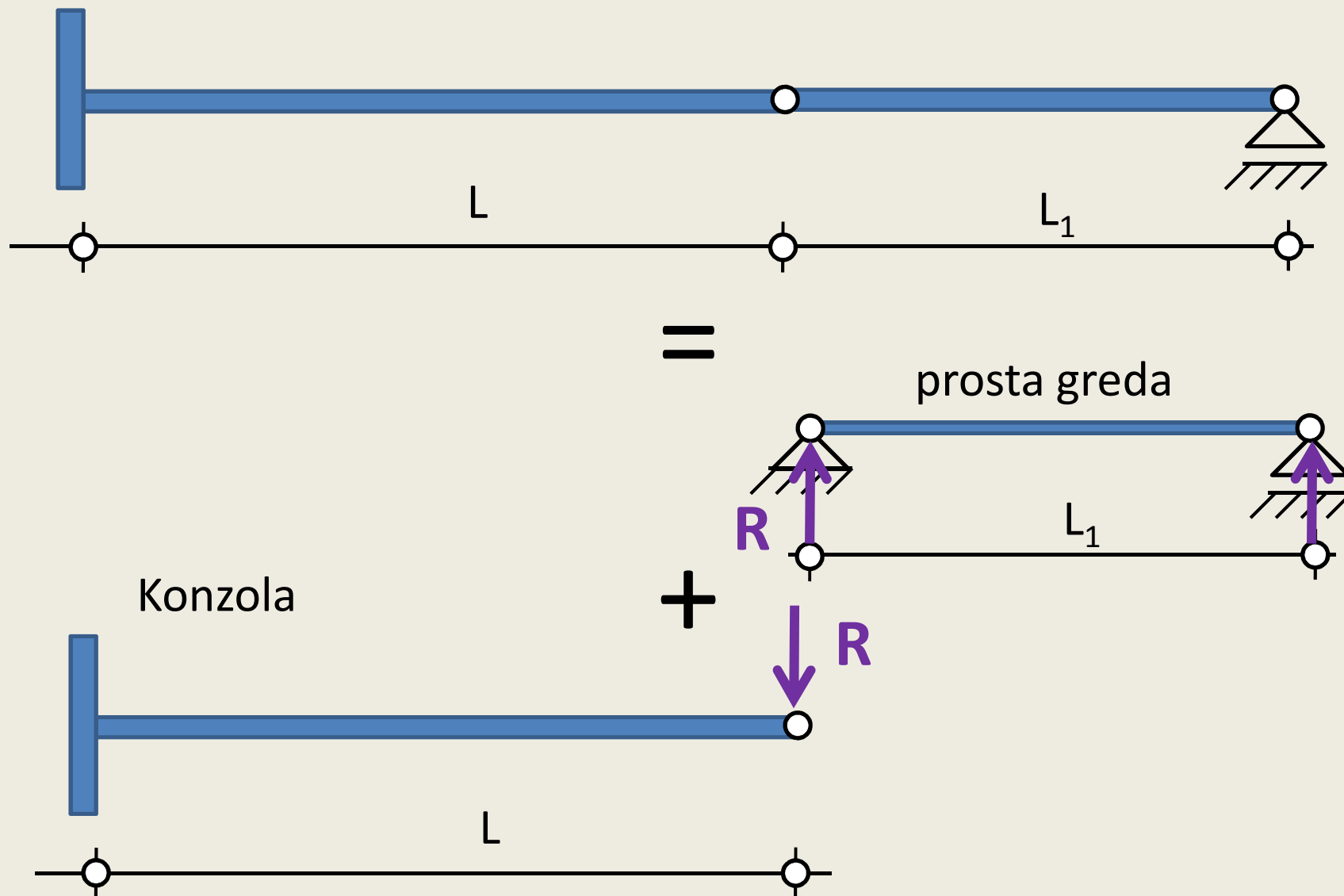
greda sa jednim prepustom



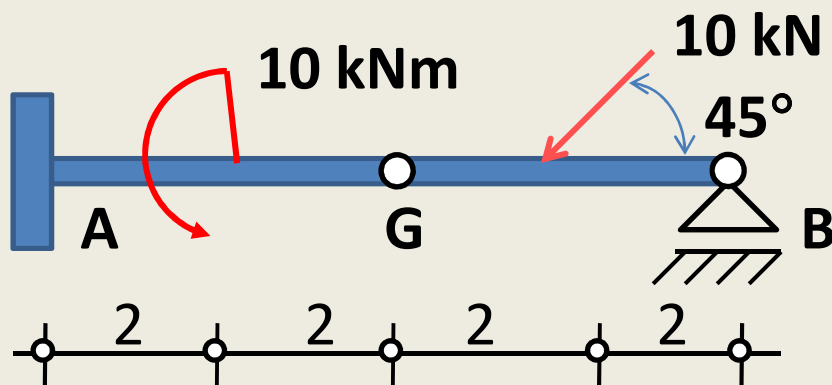
Greda sa prepustom i prosta greda



Spoj proste grede i konzole

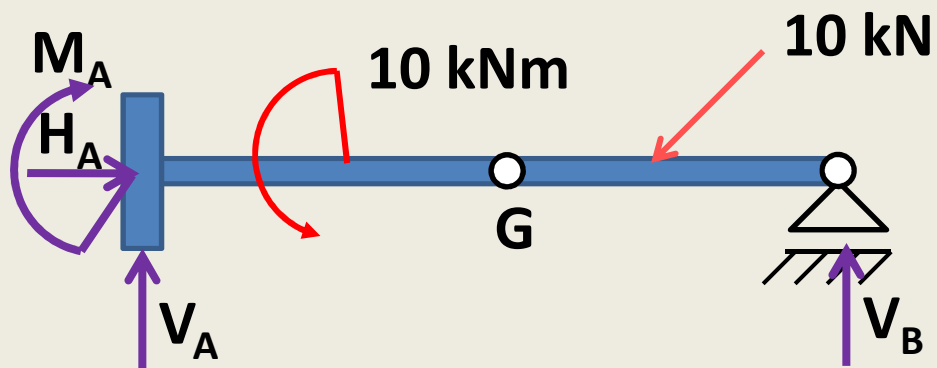


6.1 Za zadati nosač i opterećenje nacrtati dijagrame presečnih sila



a) Određivanje reakcija

zamenimo oslonce sa reakcijama oslonaca
imamo četiri nepoznate reakcije



Uslovi ravnoteže

$$1) \sum H_i = 0$$

$$2) \sum V_i = 0$$

$$3) \sum M_i = 0$$

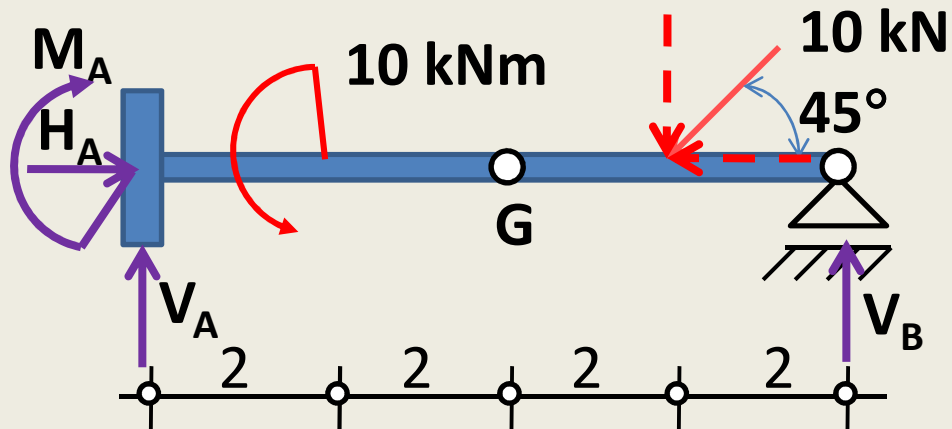
Potreban je još jedan uslov ravnoteže

Uslovi ravnoteže osnovni

$$1) \sum H_i = 0$$

$$2) \sum V_i = 0$$

$$3) \sum M_i = 0$$



Dodatni uslov je momenat u zglobu jednak nuli. Možemo uzeti sumu momenata sa leve ili desne strane u odnosu na zglob

$$1) \sum H_i = 0; \quad -H_A + 10 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$2) \sum V_i = 0; \quad V_A - 10 \cdot \sin 45^\circ + V_B = 0$$

$$3) \sum M_A = 0; \quad M_A - 10 + 10 \cdot \sin 45^\circ \cdot 6 - V_B \cdot 8 = 0$$

$$4) \sum M_G^d = 0; \quad 10 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 - V_B \cdot 4 = 0$$

Četiri jednačine iz kojih izračunavamo četiri nepoznate reakcije

Iz četrte jednačine imamo

$$10 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 - V_B \cdot 4 = 0 \quad ; \quad V_B = 10 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 / 4 = 3,54 \text{ kN}$$

Iz treće jednačine imamo

$$M_A = 10 - 10 \cdot \sin 45^\circ \cdot 6 + 3,54 \cdot 8 = -4,10 \text{ kNm}$$

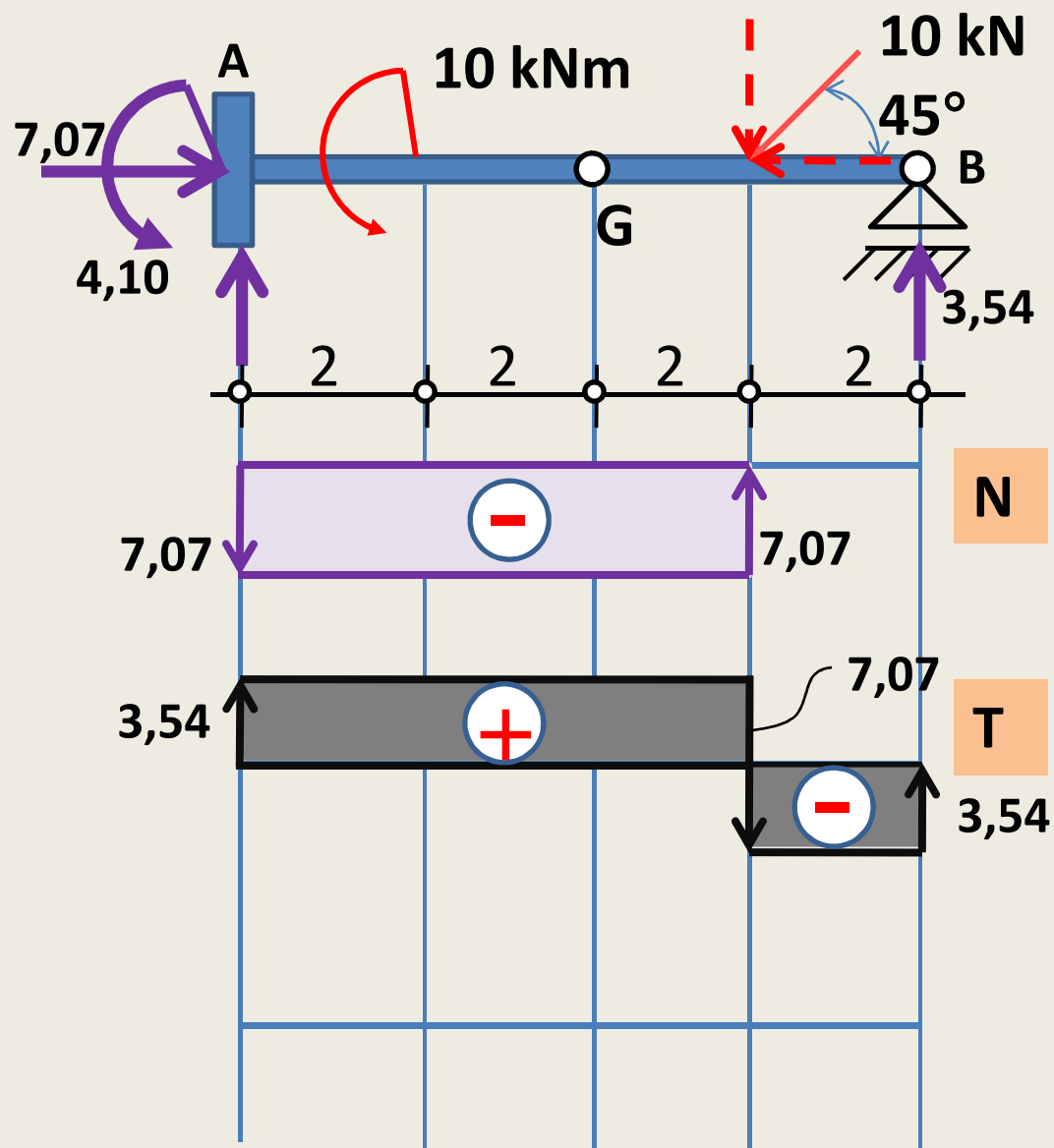
Iz druge jednačine imamo

$$V_A = +10 \cdot \sin 45^\circ - V_B = 3,54 \text{ kN}$$

Iz prve jednačine imamo

$$H_A = 10 \cdot \cos 45^\circ = 7,07 \text{ kN}$$

Crtanje dijagrama presečnih sila



Normalne sile

$N_A = -7,07 \text{ kN}$ (pritiska kraj štapa)

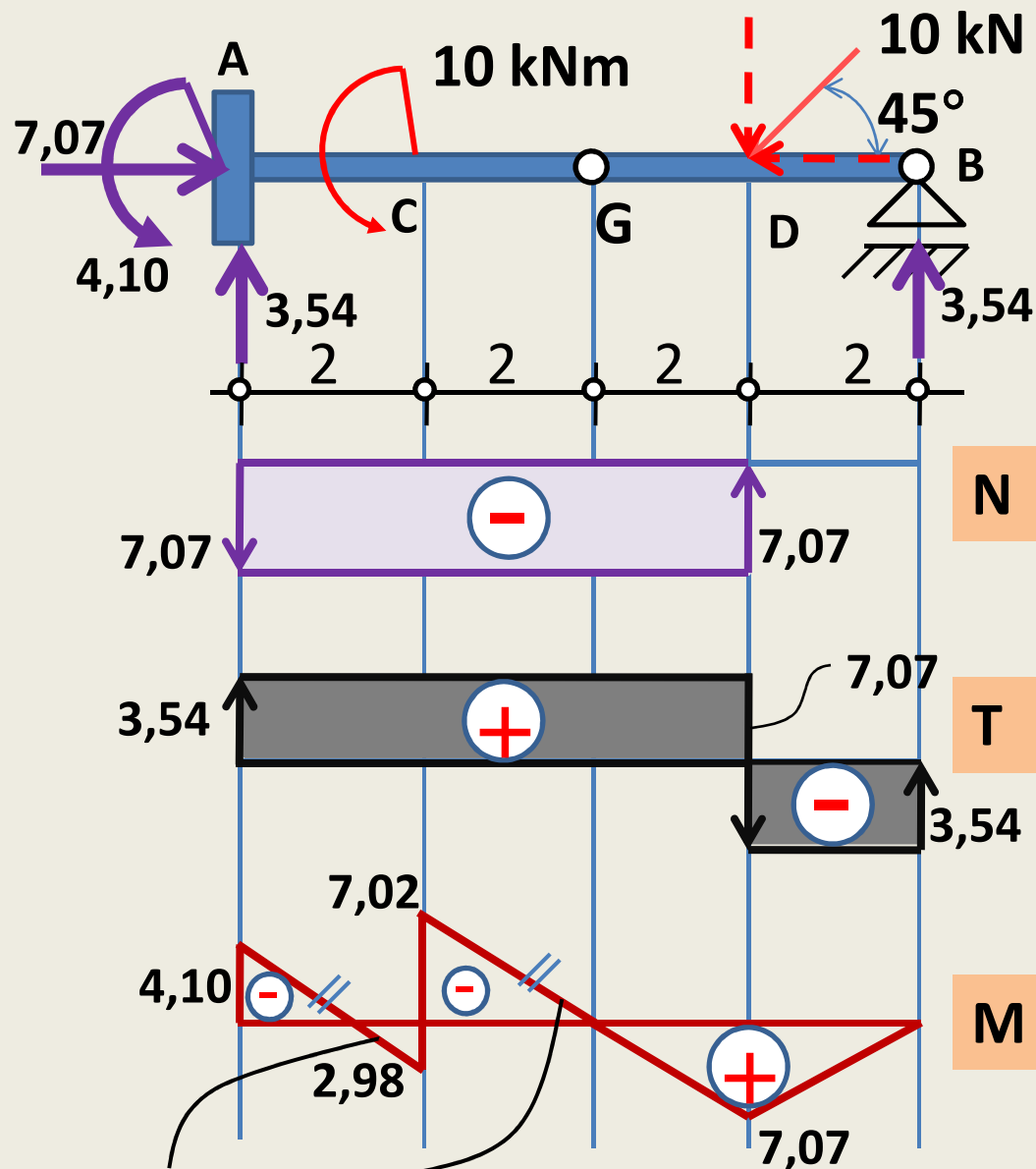
Sve do sile F_H nema promene i sila $F \cdot \cos 45^\circ$ zatvara dijagram

Transverzalne sile

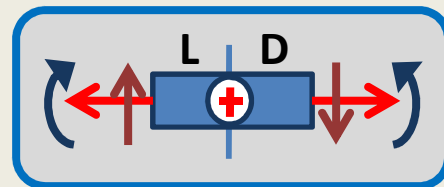
$V_A = 3,54 \text{ kN}$ (pozitivna)

Sve do sile F_V nema promene sila $F \cdot \sin 45^\circ$ deluje u negativnom smeru

Dalje je dijagram konstantan i sila B_V zatvara dijagram



Paralelne linije



Momenti savijanja

U čvoru A deluje momenat
 $M_A = -4,10$ kNm (negativan levo)

U čvoru C

$$M_C^{\text{levo}} = -4,10 + 3,54 \cdot 2 = 2,98 \text{ kNm}$$

$$M_C^{\text{desno}} = 2,98 - 10 = -7,02 \text{ kNm}$$

U čvoru G (zglob)

$$M_G^{\text{levo}} = -4,10 + 3,54 \cdot 4 - 10 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_G^{\text{desno}} = 0$$

U čvoru D

$$M_D^{\text{levo}} = -4,10 + 3,54 \cdot 6 - 10 = 7,07 \text{ kNm}$$

$$M_D^{\text{desno}} = 3,54 \cdot 2 = 7,07 \text{ kNm}$$

U čvoru B

$$M_B = 0 \text{ (pokretan oslonac)}$$